

振动测试技术

孙利民 编

郑州大学

2004. 6

目 录

| | |
|----------------------------|----|
| 第 1 章 振动测试技术概论 | 1 |
| 1.1 振动试验的目的和意义 | 1 |
| 1.2 试验方法和内容 | 3 |
| 1.3 工程振动中的被测参数 | 6 |
| 1.4 工程振动测试及信号分析的任务 | 13 |
| 1.5 工程振动测试方法及分类 | 15 |
| 第 2 章 机械式传感器工作原理 | 17 |
| 2.1 传感器的作用 | 17 |
| 2.2 相对式机械接收原理 | 18 |
| 2.3 惯性式机械接收原理 | 18 |
| 2.4 非简谐振动测量时的技术问题 | 26 |
| 第 3 章 机电式传感器工作原理 | 29 |
| 3.1 振动传感器的分类 | 29 |
| 3.2 电动式传感器 | 30 |
| 3.3 压电式传感器 | 32 |
| 3.4 电涡流式传感器 | 40 |
| 3.5 参量型传感器 | 41 |
| 第 4 章 振动测量系统 | 47 |
| 4.1 微积分放大器 | 47 |
| 4.2 滤波器 | 54 |
| 4.3 压电加速度传感器测量系统 | 60 |
| 4.4 电涡流式传感器的测量系统 | 65 |
| 4.5 动态电阻应变仪 | 67 |
| 4.6 参量型传感器测量系统 | 73 |
| 第 5 章 激振设备 | 77 |
| 5.1 激振器 | 77 |
| 5.2 振动台 | 80 |
| 5.3 液压式振动台 | 82 |
| 5.4 其它激振方法 | 84 |
| 第 6 章 基本振动参数的测量及仪器设备 | 87 |

| | | |
|------|----------------------|-----|
| 6.1 | 简谐振动频率的测量 | 87 |
| 6.2 | 机械系统固有频率的测量 | 92 |
| 6.3 | 简谐振动幅值的测量 | 96 |
| 6.4 | 同频简谐振动相位差的测量 | 99 |
| 6.5 | 衰减系数的测量 | 103 |
| 第7章 | 模拟平稳信号分析 | 109 |
| 7.1 | 波形分析的简单方法 | 109 |
| 7.2 | 模拟式频率分析 | 114 |
| 7.3 | 模拟式实时频谱分析简介 | 120 |
| 第8章 | 振动测试仪器的校准 | 123 |
| 8.1 | 分部校准与系统校准 | 123 |
| 8.2 | 静态校准法 | 125 |
| 8.3 | 绝对校准法 | 126 |
| 8.4 | 相对校准法 | 127 |
| 第9章 | 数字信号分析 | 131 |
| 9.1 | 基本知识 | 131 |
| 9.2 | 离散傅里叶变换 | 134 |
| 9.3 | 快速傅里叶变换 (FFT) | 137 |
| 9.4 | 泄漏与窗函数 | 141 |
| 9.5 | 噪声与平均技术 | 145 |
| 9.6 | 数字信号分析仪的工作原理及简介 | 148 |
| 第10章 | 实验模态分析简介 | 154 |
| 10.1 | 基本概念 | 154 |
| 10.2 | 多自由度系统的传递函数矩阵和频响函数矩阵 | 160 |
| 10.3 | 传递函数的物理意义 | 162 |
| 10.4 | 多自由度系统的模态参数识别 | 164 |
| 10.5 | 模态分析中的几种激振方法 | 170 |
| 10.6 | 模态分析的实验过程 | 172 |

第1章 概述

1.1 振动试验的目的和意义

唯物史观认为，世界上的一切都在运动着，运动是物质存在的形式。人类认识物质，就是认识物质的运动形式，只有通过运动才能认识各种物质的形态与性质。在物质的运动中，振动和冲击是运动的主要形式，是自然界中广泛存在的现象。同世界上一切事物无不具有两重性一样，振动和冲击也有两重性。当我们没有掌握振动与冲击的规律时，它会给人类带来严重的危害，一旦当我们认识了它的规律，它又会变害为利，给人类带来利益。

振动与冲击的危害常表现在以下几个方面：

(1)强烈而持续的振动，尤其是随机振动会导致结构的疲劳损坏。根据有关部门统计，在结构损坏中 80%是属于疲劳损坏。交通车辆的车轴、弹簧、轴承、构架、钢结构等损坏都是在随机载荷作用下引起的，绝大多数都属于疲劳损坏。疲劳损坏往往会造成很大的危害，历史上曾发生过大型客机因一枚螺栓的疲劳断裂而导致机毁人亡，大型气轮发电机组曾因轴承振动疲劳使转子断成数段而飞出数百米外。美国的塔柯马大桥因风振而断毁。强地震造成的灾难性破坏更是令人触目惊心。工程中的种种事例，举不胜举。

(2)强烈的冲击往往会造成结构的瞬时超越损坏。当结构动力响应首次超过其允许的上限值时，结构将发生首次超越损坏。如军工系统就曾发生过瞄准镜在打炮时由于强烈冲击而振碎，牵引火炮在牵引试验中由于道路的强烈冲击，炮车轴振断。

(3)强烈的振动和冲击会导致仪器设备的功能失效。例如，强烈的振动或冲击会使仪器仪表的精度降低、元器件参数发生变化，甚至损坏，造成功能失灵。强烈或者持续的振动会使机件松动，密封受到破坏，部件产生过大的变形，以至不能工作。我国某部曾对机载产品失效情况进行分析统计，总故障中 52.7%是因环境因素引起的，其中振动引起的故障占环境因素引起的故障的 21.6%，冲击引起的失效占 2.1%。对于运动机械，有关部门也通过统计，由于振动引起的故障率一般可达 60%~70%。由此可见，振动故障在机械故障中所占比例十分高。

(4)强烈持续的振动和冲击会导致动态特性欠佳的结构、设备的总体性能和总体水平下降。工程中很多机械设备、电器设备或者武器都是在振动环境下工作的。例如,各种火炮都是在振动和冲击过程中工作的,尤其是连发射击的火炮,振动对射击精度有很大的影响。有关课题研究表明,对于65式双管37mm高炮,由于振动对射弹散布的影响占总散布的80%~90%之高。某化肥厂的大型空气压缩机组、某油田的石油钻机等机械设备往往由于强烈振动而迫使停机进行检修,严重影响了产品质量和生产率。

(5)强烈的振动和冲击对人体本身也会造成严重的危害。当振动和冲击超过一定的限度时,就会破坏人与环境、人与机器之间的和谐关系,干扰人的情绪,损坏人的健康,降低工作效率。研究表明,环境振动对人体的生理、心理的危害主要是由振动频率决定的,尤其是与人体某些部分的共振频率相同的振动频率会造成更大的影响。对人体影响最大的激振力频率为4—8Hz,人体不同部分对不同激振力频率的反应如下:

2.5—5Hz之间的振动,可引起颈椎和腰椎的共振,振幅增大约240%。

4—6Hz间的振动,可使人的躯干、肩以及颈发生共振,振幅增大约200%。

20—30Hz间的振动,可使人的关节与肩之间出现强共振,其振幅增大250%。

60—200Hz间的振动,可使人的眼球、手指发生共振,共振幅增大约230%。

一般地面设备机械振动的频率范围是10—100Hz,船舶设备机械振动的频率范围是5—100Hz,可见这些振动对人体都是很有危害性的。

(6)振动又是噪音的主要来源,强噪音会造成环境污染,使人不能正常工作,并造成各种职业病或污染性病害,危及人类健康。

有关研究表明,结构表面声辐射的能量与振动速度、振动模态及振动强度有关。

振动虽有上述种种危害性,但是一旦人们掌握了振动规律,就可以消除振动、控制振动,并可减轻以至消除振动带来的危害,还可以利用振动来为人类服务。例如,工业中常用的振动筛、工厂铸造车间用的铸件振动落砂机、用于混凝土的振动捣固机、振动打桩机以及利用共振原理制作的搅拌混料机,振动压路机,都是利用振动原理工作的机械设备,问时还可以利用振动消除构件的内应力。更为重要的是,如果很好地认识并掌握了振动规律,就可以设计制造出动态特性良好的机械设备。尤其是在振动和冲击过程中工作的机械设备,动态特性的好坏,体现了机械设备的总体性能和总体水平,因为这些机械设备,振动和冲击直接影响着设备的总体性能指标,设备本体,各部分的机械动作,所有配置的仪器仪表都要承受其振动和冲击的作用,都存在着适应性、可靠性、破坏或故障的问题。因此,振动与冲击是工程中的共同问题。

研究振动与冲击，目的在于摸清振动规律，指导机械结构的优化设计，对设备的振动与冲击进行预测或进行振动控制，以保证机械设备具有良好的动态特性和良好的环境适应性，以提高机械设备的总体性能和总体水平。

振动与冲击的研究包含有极其丰富的内容，既有基本机理、基本原理方面的研究，也有工程应用方面的研究，既有理论研究，也有实验研究。由于研究对象日趋复杂，实验研究占有十分重要的地位。实验不仅对研究尚未明了其机理的振动现象十分必要，还为复杂振动系统的分析与设计提供更符合实际情况的资料。实验结果是最终考核和检验工程结构动态特性好坏的最权威的手段。因此，振动与冲击的研究要立足于实验，通过实验寻求振动与冲击的规律，通过实验验证理论研究的正确性，深化理论并发展理论。

1.2 试验方法和内容

不久以前，工程界在设计机械结构时，常常只考虑静载荷和静特性，当产品试制成功后再作动载荷和动特性的测试。如果不符合产品的技术指标，采取局部补救的措施，这种设计方法称为静态设计、动态校核补救法。随着科学的迅猛发展，要求机械设备或结构具有更高的性能，更高的效率，更好的环境适应性，更高的自动化程度，更多的功能，更加轻巧并使用方便，更节省材料。这就要求机械设备或结构各部分以及配置的仪器仪表不仅具有良好的功能特性，而且要具有很好地环境适应性、可靠性，即具有良好的动态特性。这种要求迫使工程设计必须进入到动态设计阶段，并在实施(生产、加工或建造)、管理、使用、监测、维修等阶段采取全过程的、全方位的动态措施，这样才能保证生产出高质量的机械设备或结构。

机械设备或结构的动力学问题，归纳起来包括以下三个方面的问题：

(1)已知环境对系统(机械设备或结构)的输入(激励)和系统的动态特性，求系统的输出。工程上称为响应预测。这是结构动力学中的正问题。响应预测的目的在于寻求结构系统的目标响应，即最优响应，由目标响应进而保证结构的目标性能。

(2)已知输入和输出，求系统的动态特性，工程上称为系统识别。解决这类问题的途径是根据实测到的输入(激励力)与输出(响应)的信息，按照目标函数最优的判据来确定结构系统的动态特性，这是结构动力学中的一种逆问题。系统识别的目的在于通过寻求结构系统的最优模态参数，进而保证结构系统的最优物理参数及其匹配，并为动力学分析计算的正确建模提供依据。

(3)已知输出和系统的动态特性求输入，工程上称为载荷识别或环境预估，这

也是结构动力学中的一种逆问题。载荷识别的目的在于用来判断结构系统的动强度、动刚度是否安全可靠。

以上三方面的问题有着内部必然规律的联系，它们之间是互为因果的，只有将这三者间的内部规律认识清楚并妥善解决好，才能使设计生产出的机械设备，建造出的高楼大厦具有理想的使用性能，达到设计生产或建造的预期目的。

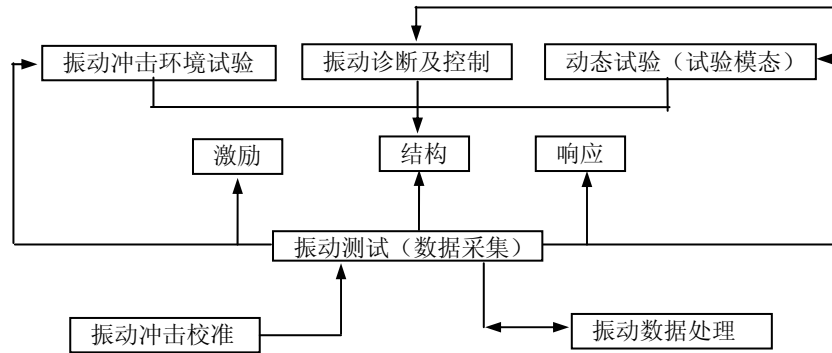


图 1-1 振动与冲击试验内容方框图

围绕以上三大问题，振动与冲击的试验方法和内容是多方面的，它们之间既有着独立性，又存在着有机的联系，形成为振动试验解决工程动态特性问题的一个整体。

振动与冲击试验内容见方框图 1—1。

从力学观点讲，无论怎样复杂的机械设备或结构的物理特性参数，都是由质量、弹簧刚度和阻尼这三种最简单、最基本的物理参数组成的，这几个参数都是结构的固有特性。人们设计制作的机械系统或者统称为结构都是为了实现某种预想功能的。比如火炮，是用来发射高速弹丸摧毁敌目标的，火车是用来运输乘客或货物的。要想使结构完全按照人们的预想目的准确地实现其功能，就得使结构具有良好的动态特征，使它能在特定的环境激励条件下产生设想的响应。所谓结构的动态特性是指结构的模态参数，包括固有模态，即固有振型、固有频率和阻尼比。

系统要工作，必然要承受外部环境的各种激励。激励可以是力、位移、速度和加速度。例如火炮工作时要承受高膛压的激励，汽车在公路上行驶时要受到路面高低不平的道路激励。确定性激励的时域规律分为简谐激励、周期性激励和非周期性激励，非确定性激励称为随机激励，按其统计规律又可分为平稳激励和非平稳激励，

由于各种结构具有不同的固有特性，在不同激励信号的作用下，其响应信号是非常复杂的。响应信号分为线量响应和角量响应，分别可用位移、速度、加速度来

描述。

不管是激励信号还是响应信号，均可在时域内、幅值域内、频域内进行描述。

对线性系统来说，激励、结构、响应三者之间有着确定的关系，知道其中两种数据信息，就可以求出第三种数据信息。

振动测试或称数据采集，是振动试验的主要内容之一，振动测试的目的和任务在于如实地获取数据信息，包括激励、结构、响应的有关数据信息，以便直观了解激励状况、响应状况和结构特性。为了进一步了解激励、结构、响应最主要的特性或解决它们之间存在的一些问题，对测试数据就要作进一步处理和分析，以便揭示其最本质的东西或观察其主要矛盾。另外，环境试验、动态试验、振动诊断及控制都要用到实测的数据信息。因此，测试是振动试验最基本的环节。

对采集到的最基本最原始的信号，有的可以直接提供一些有用的信息，但这往往是十分有限的，远远不能满足振动分析及解决问题的需要，因此有必要进一步进行加工和处理，通过分析处理找出最有代表性的信息，掌握其中规律并以此来指导工程实践。由于信号的特性不同，要解决的工程问题也不同，因此，数据的分析处理方法也不同。归纳起来，可以在时域、频域、幅值域内对测试数据进行分析 and 处理。而且这三域之间是可以互相转换的。

为了保证测试数据的准确性和可靠性，整个测试系统，包括传感器、前置放大器、信号适调器、记录仪都必须具有良好的性能。虽然它们都经过出厂检定并给出了具体的性能指标，但随着使用环境的变化，特别是经过恶劣的振动冲击环境之后，有可能使传感器、仪器设备的性能指标发生变化，甚至遭到损坏。因此测试系统要定期地进行检定，校准，尤其对一些重要实验，在实验前都要进行仔细地校准，选择满足使用要求的传感器和测试系统。这样才能对试验心中有数，使试验数据准确可靠。

环境工程是可靠性工程的基础，可靠性工程是环境工程的发展和补充。振动冲击环境试验是整个环境工程的最基本最主要的内容之一。因为，不仅单一的振动和冲击环境在结构故障中占有很高的比重，而且热、动(振动、冲击)和湿度组合环境更加恶化了其损伤机理。具体表现为：

(1)结构及仪器设备的动特性变坏。在组合环境下，电子设备的摩擦阻尼减少，从而使振动响应量增加，由实测数据得知，振动响应量可增加两倍。

(2)应力腐蚀与疲劳加剧。高温、高湿与振动组合环境，必然给仪器设备；带来应力腐蚀、使疲劳损坏加剧。

(3)使结构及仪器设备的涂层剥落。单项温度试验很难查出涂层缺陷，而在温度交变下涂层膨胀、收缩，再加上振动、冲击等机械作用，使结构产生弯曲，造成

裂纹，潮气透过裂纹使裂纹扩展，加速仪表板上的电容、电阻变质，并暴露出来，以致造成设备部分或整个失效的涂层缺陷。

(4)在工程实际中，振动对结构本身产生影响，使之因疲劳而损坏，还使附设于结构上的仪表和控制系统在振动环境下失灵，甚至导致全系统的毁灭性事故。这些问题的存在促进了一个新的科学分支的发展，即振动与冲击环境工程。它的任务是为附设于结构的仪表等附件提供振动环境数据，研究模拟特定环境的原理和设备，并提出控制振动及改善振动环境的措施。

试验模态分析综合了测试技术、数据处理、系统识别和结构动力学学科分支，是振动试验的一项重要的重要组成部分。试验模态分析通过动态试验和模态识别，确定机械结构系统的动力学特性。根据模态试验所确定的模态参数，即模态频率、阻尼和振型等，可广泛应用于机械结构动力学特性的故障排除、质量检测、故障诊断以及机械结构有限元数学模型的优化、修改、动力响应仿真、结构动态特性的灵敏度分析、动态优化设计等方面。试验模态分析技术可分为四个主要环节，机械系统的激振技术，激励和响应量的测试技术，包括动态测试技术、数据采集和信号处理，频率响应函数估计，模态识别。

近年来信号处理技术与模态参数识别技术在机械故障监测与故障诊断技术中十分活跃并取得了很大的进展。依据现代科技提供的高灵敏度、高辨识能力(包括经过有效信号处理后的)的特征参数，可以了解机械结构的动态特性，掌握其运行状态，及早发现潜在的故障，以便在故障之前作出预报，及时采取各种有效措施，保证机械设备的正常运转。故障振动诊断所使用的特征值是非常多的。如时域信号的时间历程、峰值、均方值、相关函数，相干函数、谱函数、最大熵谱、谱矩、倒频谱、概率分布、信息量、熵、希尔伯特变换、各种数据模型、频率响应函数、模态参数、物理参数、适用于旋转机械的功率谱阵、频率-转速谱图、坎贝尔图，适用于滚动轴承的脉冲频率、声功率谱分析、适用于齿轮箱的边频分析等，都是非常有用的识别判断参数。根据这些实测及分析处理后所得的参数与标准参数(机械设备在正常运转情况下的各种特征参数)的差异即可进行机械设备的品质估计及各种故障诊断，进一步可采取各种措施进行被动振动控制或主动的振动控制，将过量振动设法消除或者隔离，或设法将振动幅值限制在允许的范围之内。

1.3 工程振动中的被测参数

工程振动测试的主要参数有：位移、速度、加速度、激振力、振动频率等。按

照描述振动规律的特点，可将振动分为确定性振动和随机振动两大类，其中确定性振动又分为简谐振动、复杂周期振动和准周期振动。

一、简谐振动中的测试参数

位移、速度和加速度为时间谐和函数的振动称为简谐振动，这是一种最简单最基本的振动。其函数表达式为：

$$\begin{aligned} \text{位移} \quad x(t) &= A \sin(\omega t) = A \sin(2\pi f t) \\ \text{速度} \quad v(t) &= \omega A \cos(\omega t) = \omega A \sin(2\pi f t + \frac{\pi}{2}) \\ \text{加速度} \quad a(t) &= -\omega^2 A \sin(\omega t) = \omega^2 A \sin(2\pi f t + \pi) \end{aligned} \quad (1-1)$$

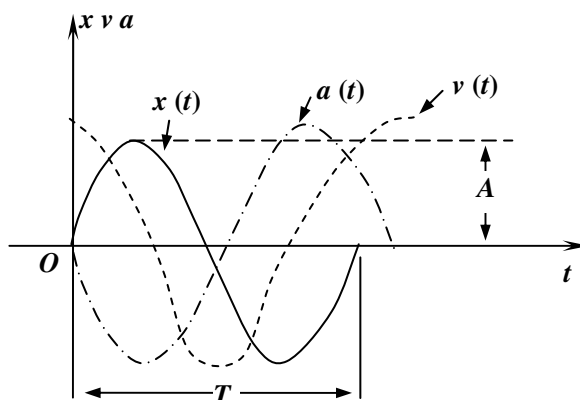


图 1-2 简谐振动的实测位移、速度、加速度时间历程示意图

式中 A ——位移幅值 (cm 或 mm)；

ω ——振动圆频率 (1/s)；

f ——振动频率 (Hz)。

$x(t)$ 、 $v(t)$ 和 $a(t)$ 三者之间的相位依次相差 $\pi/2$ ，如图 1—1 所示。若令：速度幅值 $V = \omega A$ ，加速度幅值 $a_0 = \omega^2 A$ ，则有

$$a_0 = \omega V = \omega^2 A = (2\pi f)^2 A \quad (1-2)$$

由此可见，位移幅值 A 和频率 ω (或 f) 是两个十分重要的特征量，速度和加速度的幅值 V 和 a_0 可以直接由位移幅值 A 和频率 f 导出。在测量中，振动测试参数的太小常用峰值、绝对平均值和有效值来表示。所谓峰值是指振动量在给定区间内的最大值，均值是振动量在一个周期内的平均值，有效值即均方根值，它们从不同

的角度反映了振动信号的强度和能量。

在测量仪表上, 峰值一般用 Peak-peak (峰-峰) 表示, 而有效值则用 RMS (Root mean square) 表示。位移绝对平均值 μ_x 的表达式为

$$\mu_x = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)| dt \quad (1-3)$$

绝对平均值亦常用 \bar{x} 来表示。位移有效值 x_{RMS} 的表达式为

$$x_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt} \quad (1-4)$$

它反映了振动的能量或功率的大小。

对于简谐振动, 其位移峰值 x_{peak} 就是它的幅值 A , 而位移的有效值

$$x_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T A^2 \sin^2(\omega t) dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} A \quad (1-5)$$

峰值与有效值之比, 称为波峰系数或波峰指标。简谐振动的波峰系数

$$F_c = \frac{A}{x_{RMS}} = \sqrt{2} = 1.414 \quad (1-6)$$

有效值与均值之比, 称为波形系数。对于简谐振动, 其波形系数

$$F_f = \frac{x_{RMS}}{\mu_x} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1.11 \quad (1-7)$$

波峰系数 F_c 和波形系数 F_f 反映了振动波形的特征, 是机械故障诊断中常用来作为判据的两个重要指标。

在振动测试过程中, 为了计算、分析方便, 除了用线性单位表示位移、速度和加速度外, 在分析仪中还常用“dB”(分贝)数来表示, 称为振动级。这种量纲是以对数为基础的, 其规定如下

$$\text{加速度} \quad a_{dB} = 20 \log \frac{a_1}{a_2} \text{ dB} \quad (1-8)$$

$$\text{速度} \quad v_{dB} = 20 \log \frac{v_1}{v_2} \text{ dB} \quad (1-9)$$

$$\text{位移} \quad x_{dB} = 20 \log \frac{x_1}{x_2} \text{ dB} \quad (1-10)$$

式中 a_1 ——测量而得的加速度均方根值 (有效值) 或峰值 (mm/s^2);

a_2 ——参考值，一般取 $a_2 = 10^{-2} \text{ mm/s}^2$ ，或取为 1；

v_1 ——测量而得的速度均方根值（有效值）或峰值（mm/s）；

v_2 ——参考值，一般取 $v_2 = 10^{-5} \text{ mm/s}$ ，或取为 1；

x_1 ——测量而得的位移均方根值（有效值）或峰值（mm）；

x_2 ——参考值，一般取 $x_2 = 10^{-8} \text{ mm}$ ，或取为 1。

采用对数量纲时，前述简谐振动的波峰系数 F_c 和波形系数 F_f 可分别表示为

$$F_c = 20 \log \sqrt{2} = 3 \quad \text{dB}$$

$$F_f = 20 \log \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1 \quad \text{dB}$$

二、有阻尼系统的自由衰减振动中的测试参数

在振动测试过程中，当振动系统中有阻尼作用时，其振动规律为衰减振动。例如：当认为阻尼与速度的一次方成正比时，其运动微分方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (1-11)$$

解得振动的位移函数为

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{-nt} \sin(\sqrt{p_n^2 - n^2}t + a) \\ &= Ae^{-nt} \sin(p_d t + a) \\ &= Ae^{-nt} \sin(2\pi f_d t + a) \end{aligned} \quad (1-12)$$

式中 A 为初始位移振幅； c 为阻尼系数， n 为衰减系数，即 $2n = c/m$ ；

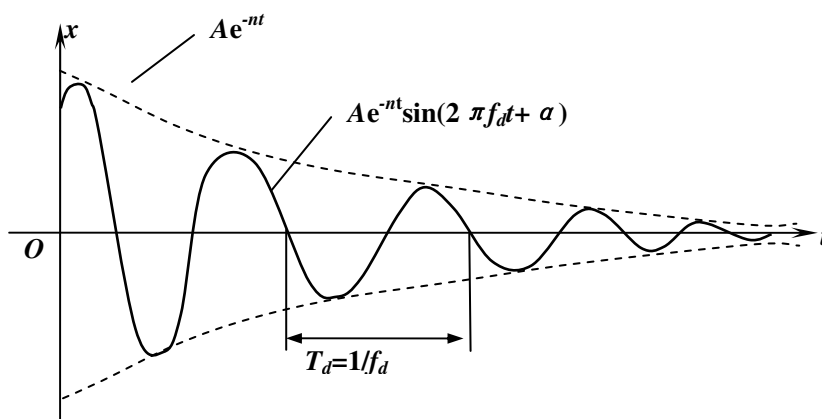


图 1-3 衰减振动的实测波形

$p_d = \sqrt{p_n^2 - n^2}$ 为振动的角频率, $p_d = 2\pi f_d$, $f_d = 1/T_d$, f_d 为振动频率, T_d 为振动周期; a 为初相位。

这种衰减振动的实测振动波形示意图如图 1—3 所示。

由此可知, 在振动测试过程中, 除了振幅 A 、振动频率 f_d 、振动周期 T_d 之外, 衰减系数 n 或阻尼系数 c 也是一个重要的特征量, 且只能通过振动测试求出。

三、复杂周期振动中的测试参数

复杂周期振动是由一系列频比 f_n/f_m (或 ω_n/ω_m $n \neq m$) 为有理数的简谐振动叠加而成。当自变量增加到某一定值时, 其函数值又恢复到同一个值的振动, 所以又简称为周期振动, 用周期性函数表示为

$$x(t) = x(t \pm nT) = x(t \pm n/f_1) \quad n = 1, 2, \dots \quad (1-13)$$

式中, T 为周期, f_1 称为基频。复杂周期振动可以按如下公式展开为傅里叶级数:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{x_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) \\ &= \frac{x_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \sin(n\omega_1 t + \varphi_n) \end{aligned} \quad (1-14)$$

其中

$$\begin{aligned} x_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \varphi_n &= \arctg\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \end{aligned}$$

$$x_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_1 t dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n2\pi f_1 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin n\omega_1 t dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin n2\pi f_1 t dt$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

其中, x_n 为第 n 次谐波分量的幅值; φ_n 为相位差; x_0 为均值; a_n 为余弦分量; b_n 为正弦分量; ω_1 (或 f_1) 为基频, 其余为倍频。与基频对应的分量称为基波, 与倍频相对应的分量均称为高次谐波。

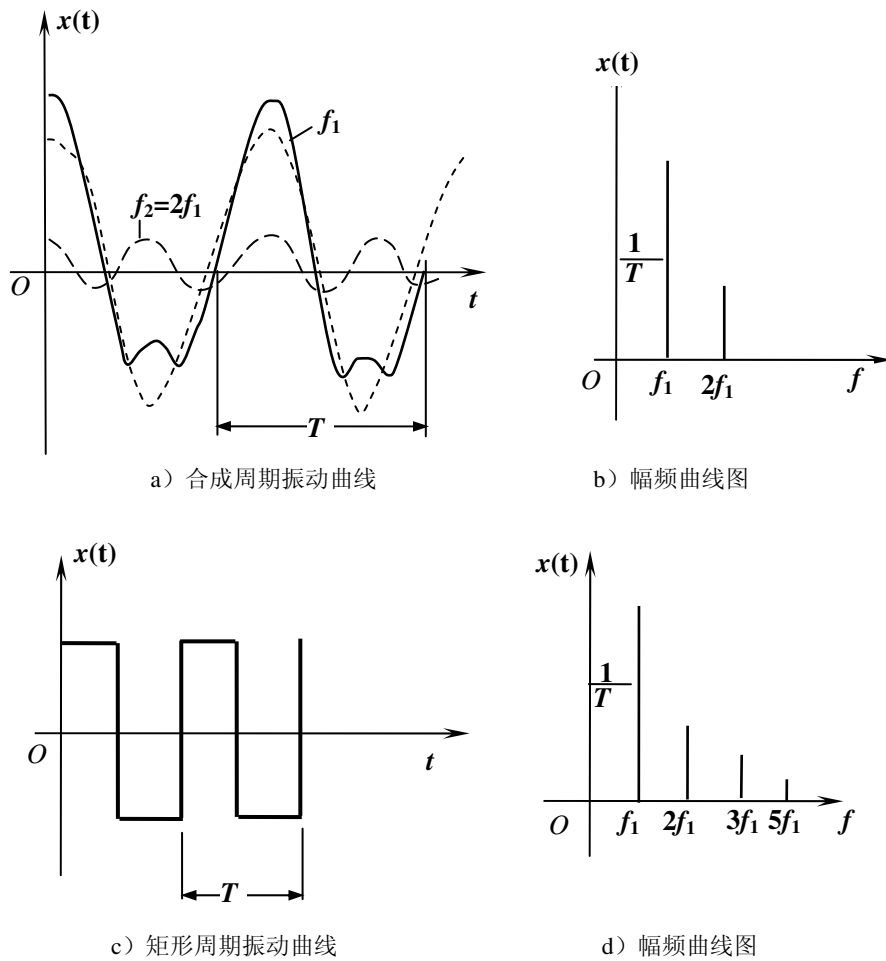


图 1—4 复杂周期振动的实测时间历程曲线及相应的幅频曲线图

以频率 f 为横坐标，幅值 x_n 或相位差 φ_n 为纵坐标，绘制成的曲线图称为频谱曲线图，并分别称为幅频曲线图或相频曲线图。这种分析方法称为频谱分析法，它基于傅里叶级数展开定理。复杂周期振动的频谱曲线图为离散谱。图 1—4a) 表示在实测中得到的两个简谐振动合成的周期振动曲线的时间历程记录；在实际测试中虚线是没有的，它是数据处理后经计算而得到的简谐振动分量的时间历程。图 1—4b) 是它经后续设备分析仪数据处理后得到的幅频曲线图，由此可知复杂周期振动不一定包含全部谐波成分，有时只有几个分量，有时其基频分量也可以没有。图 1—4c) 表示在实测中记录的一矩形周期振动曲线的时间历程。图 1—4d) 是它的记录时间历程信号经数据处理后所得到的幅频曲线图，由图可知，基频为 f 的矩形周期振动的高次谐波的幅值随频率增高而迅速减小。

四、准周期振动中的测试参数

两个或两个以上的无关联的周期性振动的混合，称为准周期性振动（Quasi-periodic vibration），其特点是各频率之比不为有理数。其表达式为

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad (1-15)$$

式中，各阶频率之比 ω_n / ω_m ($n \neq m$) 不为有理数，例如

$$x(t) = x_1 \sin(2t + \varphi_1) + x_2 \sin(3t + \varphi_2) + x_3 \sin(\sqrt{50}t + \varphi_3) \quad (1-16)$$

该式虽由三个简谐振动叠加而成。但不是周期性函数，因为 $2/\sqrt{50}$ 和 $3/\sqrt{50}$ 不是有理数(基本周期无限长)；但经测试而得到的频谱仍然为离散谱。

五、非周期振动中的测试参数

若描写机械振动量随时间变化的曲线是非周期的，就称这种振动为非周期振动。

为了进一步分析非周期振动，频谱分析法仍是十分有效的方法。非周期振动的频谱分析法与周期振动的频谱分析法基本思想类似，不同之点是周期振动的频谱分析法是基于傅里叶级数展开而非周期振动的频谱分析法则基于傅里叶积分。两种方法统称为频谱分析法。频谱分析法是把一个时间域的振动信号函数转变到频率域函数的一种计算方法。

傅里叶积分的数学表达式如下：

如果一个实测的振动信号函数为 $x(t)$ ， $0 < t < T$ ，则它的傅里叶积分（频谱）为

$$x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (1-17)$$

式中 f 为频率变量， $x(f)$ 是频率 f 的复函数。把 $x(f)$ 转化成模 $|x(f)|$ 与相位角 $\varphi(f)$ 形式，则有

$$x(f) = |x(f)| e^{j\varphi(f)} \quad (1-18)$$

$|x(f)|$ 与 $\varphi(f)$ 都是频率 f 的实函数。把频率 f 作为横坐标， $|x(f)|$ 或 $\varphi(f)$ 作为纵坐标所绘成的曲线图称为频谱曲线图。由 $|x(f)|$ 绘成的曲线称为幅频曲线，而由 $\varphi(f)$ 绘成的曲线称为相频曲线。但非周期振动的频谱曲线图是连续谱。频谱曲线图是由测试设备中的分析设备对实测信号 $x(t)$ 进行数据处理后自动绘制而成。

由此可知；在工程振动测试中，频谱分析法是很重要的方法。这种方法能够使我们知道被测量的振动信号的频谱含量，它为我们正确选择测量方法和仪器提供了重要依据，也为分析机械动力系统的振动特性提供了有效工具。根据系统的振动信号的频谱，就可判断振动系统的动力学特征。在隔振技术中可用来帮助我们确定隔振系统的有关参数及对隔振效果进行进一步检查分析。因此，频谱分析法在工程振动测试中得到广泛的应用。

1.4 工程振动测试及信号分析的任务

工程振动测试及信号分析总是围绕一个振动系统来进行的。众所周知，在工程振动动力学中，一个单自由度线性振动系统的运动方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (1-19)$$

式中， m ， c ， k ——系统的质量、阻尼系数与刚度；

x ， \dot{x} ， \ddot{x} ——系统质量的振动位移、速度与加速度；

$f(t)$ ——外加干扰力。

对于多自由度线性振动系统，其运动方程可以用矩阵形式写出

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{f\} \quad (1-20)$$

式中 $[m]$ ， $[c]$ ， $[k]$ ——系统的质量矩阵、阻尼矩阵与刚度矩阵；

$\{x\}$ ， $\{\dot{x}\}$ ， $\{\ddot{x}\}$ ——系统诸质量的振动位移列阵、速度列阵与加速度列阵；

$\{f\}$ ——系统结构所受的外激振力列阵。

工程振动测试及信号分析是直接通过振动实验来解决由式（1—19）或式（1—20）所表达的系统动力学问题。它可归纳为以下五个方面的任务。

（1）对振动参数很清楚的系统，若已知激振力列阵 $\{f\}$ 及被测试系统的质量矩阵 $[m]$ 、阻尼矩阵 $[c]$ 和刚度矩阵 $[k]$ ，便可求出振动的位移列阵 $\{x\}$ 、速度列阵 $\{\dot{x}\}$ 及加速度列阵 $\{\ddot{x}\}$ 。这就是用测量的方法求系统的响应，以验证振动理论公式（1—19）和式（1—20）计算结果的准确性。这是振动力学中的正问题。对工程振动测试的主要要求是，在已知激振力 $\{f\}$ 的作用下，通过振动测试求出振动的位移列阵 $\{x\}$ 、速度列阵 $\{\dot{x}\}$ 和加速度列阵 $\{\ddot{x}\}$ 。如果激振力列阵 $\{f\}$ 与系统实际工作时的情况一致或十分近似，通过测试即可弄清机器在实际工作时的振动水平与振动发生时的振动模态。因此，它也被称为试验验证或工程振动测试中的正问题。

（2）对于还不清楚的系统，若已知激振力列阵 $\{f\}$ ，并可测知系统的振动位

移列阵 $\{x\}$ 、速度列阵 $\{\dot{x}\}$ 和加速度列阵 $\{\ddot{x}\}$ ，从而通过模态参数（模态频率、振型、阻尼等）来求系统的物理特性参数质量矩阵 $[m]$ 、阻尼矩阵 $[c]$ 和刚度矩阵 $[k]$ 。这是“参数识别”和“系统识别”的向题。通常称这一类问题为振动力学的第一类反问题。这类反问题对振动测试的要求，除了要精确测定 $\{x\}$ ， $\{\dot{x}\}$ ， $\{\ddot{x}\}$ 外，还要应用模态分析的方法来识别参数，以便正确地建立系统的力学模型，并完成从模态参数到物理参数的转换，这样就能弄清结构的薄弱环节，为改进结构优化设计提供充分的实验依据。

(3) 在已知系统物理参数质量矩阵 $[m]$ 、阻尼矩阵 $[c]$ 和刚度矩阵 $[k]$ 的情况下，测量出振动系统的位移列阵 $\{x\}$ 、速度列阵 $\{\dot{x}\}$ 和加速度列阵 $\{\ddot{x}\}$ ，即可求出输入的激振力列阵 $\{f\}$ 。这是“载荷识别”问题，以寻找引起结构系统振动的振源。这是结构动力学的第二类逆问题。这类问题对振动测试的要求，除了精确测出系统振动位移列阵 $\{x\}$ 、速度列阵 $\{\dot{x}\}$ 和加速度列阵 $\{\ddot{x}\}$ 外，往往还要先在已知激振力列阵 $\{f\}$ 的情况下进行第一类逆问题的计算与测试，以求得振动结构的系统参数，然后再进行载荷识别。通过这类逆问题的研究，可以查清外界干扰力的激振水平和规律，以便采取措施来减小或控制振动。

(4) 工程振动测试及信号分析的任务，还包括监测机器设备工作状态是否稳定、正常及诊断设备故障等。机器和设备在工作过程中发生不正常的运转或故障，往往会使系统的振动情况或噪声水平发生变化，因此，振动与噪声的监测，即对机器在工作情况下产生的振动和噪声的测试结果进行分析可给出机器是否正常工作的重要信息。

(5) 振动控制。通过振动控制主要为达到以下两个目的：

- ①通过振动控制减少振动量，降低振动水平，以减少甚至消除振动的危害；
- ②通过控制发生振动所需的振动激励信号使振动水平始终保持在一定的范围之内。

若要实现以上两个目的，必须首先要利用振动测试手段判明振源及其振动的性质，即振动来源于何处？是自由振动、受迫振动？还是自激振动？振动的频率成分如何？等等，然后方能“对症下药”，采取恰当的治理措施。这便要求进行系统的振动测试与信号分析，为制定治理措施和有关修改结构的参数提供充分的实验依据。

1.5 工程振动测试方法及分类

工程振动的各种参数的测量方法，按测量过程的物理性质来区分，可以分成三类。

一、机械式的测量方法

将工程振动的参量转换成机械信号，再经机械系统放大后，进行测量、记录。此法常用的仪器有杠杆式测振仪和盖格尔测振仪，能测量的频率较低，精度也较差。但在现场测试时较为简单方便。

二、光学式的测量方法

将工程振动的参量转换为光学信号，经光学系统放大后显示和记录。常用的仪器有读数显微镜和激光测振仪等。目前光学测量方法主要是在实验室内用于振动仪器系统的标定及校准。

三、电测方法

将工程振动的参量转换成电信号，经电子线路放大后显示和记录。这是目前应用得最广泛的测量方法。它与机械式和光学式的测量方法比较，有以下几方面的优点：

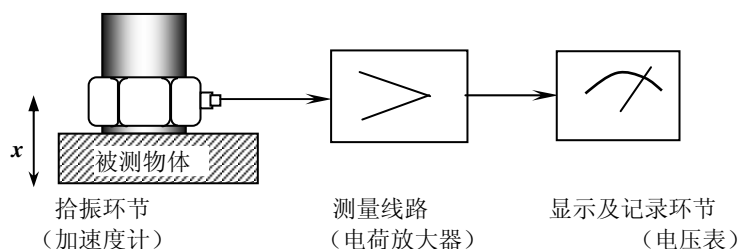


图 1-4 基本测量系统示意图

- (1) 具有较宽的频带；
- (2) 具有较高的灵敏度和分辨率；
- (3) 具有较大的动态测量范围；
- (4) 振动传感器可以做得很小，以减小传感器对试验对象的附加影响，还可以做成非接触式的测量系统；
- (5) 可以根据被测参量的不同来选用不同的振动传感器；
- (6) 能进行远距离测量；
- (7) 便于对测得的信号进行贮存，以便作进一步分析；
- (8) 适合于多点测量和对信号进行实时分析。

上述三种测量方法的物理性质虽然各不相同，但是，组成的测量系统基本相

同，它们都包含拾振、测量放大线路和显示记录三个环节。电测法测量系统示意图；如图 1—4 所示。

(1) 拾振环节。把被测的机械振动量转换为机械的、光学的或电的信号，完成这项转换工作的器件叫传感器或拾振器。传感器有很多种，它的分类方法及工作原理在下一章中将作详细介绍。

(2) 测量线路。测量线路的种类甚多，它们都是针对各种传感器的变换原理而设计的。比如，专配压电式传感器的测量线路有电压放大器和电荷放大器等；专配电阻、电容和电感变换原理的传感器的有各种测量电桥和调制线路等；此外，还有积分线路、微分线路、滤波线路和归一化装置等等。

(3) 显示及记录环节。从测量线路输出的电压信号，可按测量的需要送给显示仪器（如电子电压表、示波器、相位计）、记录设备（如光线示波器、磁带记录仪、X—Y 记录仪）及信号分析仪等。也可在必要时重放记录在磁带上的信号，并输入到信号分析仪进行各种分析处理，从而得到最终结果。

思 考 题

1. 简谐振动有哪些时域测试参数？以 $x(t) = A \sin(2\pi ft + a)$ 为例给予计算并说明。
2. 在振动测试过程中，分贝（dB）是怎样定义的，举例说明？
3. 有阻尼系统的自由衰减振动有哪几个特征参数？
4. 复杂周期振动和准周期振动是如何表示的？有何区别？如何分析这些被测信号？
5. 分析非周期信号有何方法？
6. 振动测试及信号分析的任务是什么？
7. 有几种测量方法？各有什么特点？

第5章 激振设备

振动激振设备主要是振动台和激振器。通常，激振器是安装在被测物体上直接激振，从而产生一个干扰力并作用于被测结构物上；而振动台是把被测物体装在振动平台上，振动台产生一个变化的振动位移，从而在被测物体上产生一个与振动台的振动位移相对应的牵连惯性力而激振。激振设备产生干扰力使被测物体发生强迫振动，可以方便地实现在测试实验时被测物体所要求的强迫振动形式。

激振设备种类很多，根据结构原理可分为机械式、电磁式、液压式和压电式等多种形式。本节只对常用的振动台和激振器作一简单介绍。

5.1 激振器

一、机械惯性式激振器

这种激振器是利用偏心质量的旋转，使之产生周期变化的离心力，以起激振作用。由两个带偏心质量而反向等速旋转的齿轮结构组成的机械惯性式激振器如图 5-1 所示

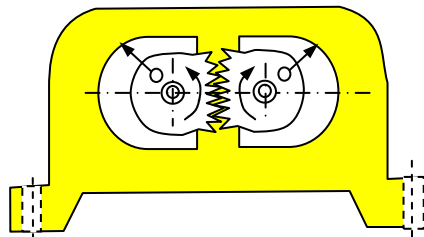


图 5-1 惯性式激振器示意图

偏心质量齿轮旋转时，两质量的惯性力的合力在铅直方向以简谐规律变化，在水平方向合力为零，则激振力的大小

$$F = 2m\omega^2 e \cos \omega t \quad (5-1)$$

其中 m —— 偏心块质量；

e —— 偏心块的偏心距；

ω —— 旋转角速度。

使用时，将激振器固定在被测物体上，激振力带动物体一起振动。此类激振器一般都用直流电动机带动，改变直流电动机的转速可调节干扰力的频率。

这种激振器的优点是，制造简单，能获

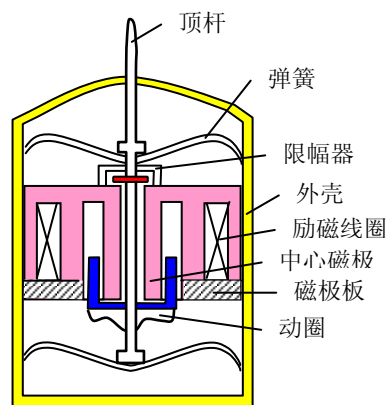


图 5-2 电磁式激振器原理

得从较小到很大的激振力（0 至几千公斤）；缺点是工作频率范围很窄，一般为 0 至 100 Hz。由于受转速的影响，激振力大小无法单独控制，另外，机械惯性式激振器本身质量较大，对被激振系统的固有频率有一定影响，且安装使用很不方便。

二、电磁式激振器

电磁式激振器是将电能转换成机械能，并将其传递给试验结构的一种仪器。其结构原理示意图如图 5-2 示。

电磁式激振器由磁路系统（包括励磁线圈、中心磁级、磁极板）与动圈、弹簧、顶杆、外壳等组成。动圈固定在顶杆上，处在中心磁极与磁极板之间的空气气隙中；顶杆由弹簧支撑，工作时顶杆处于限幅器的中间，弹簧与壳体相连接。电磁式激振器工作原理如下。

在励磁线圈中输入直流电流，使中心磁极在磁极板的空气气隙中形成一个强大的磁场；

同时再给动圈输入一个交变电流 I_e ，电流在磁场的作用下产生的电磁感应力

$$F = BLI_m \sin \omega t \quad (5-2)$$

式中 B ——磁感应强度；

L ——动圈绕线有效长度；

I_m ——通过动圈电流的幅值。

力 F 使顶杆作上下运动，由顶杆传给试件的激振力是电磁感应力 F 和可动部分的惯性力、弹性力、阻尼力等的合力。但由于激振器的可动部分质量很小，弹簧较软（激振器弹簧通常做成失稳状态；即在一定范围内，弹簧力不随弹簧变形而改变）所以在一般情况下，其惯性力、弹性力和阻尼力可以忽略。当输入动圈内的电流 I_e

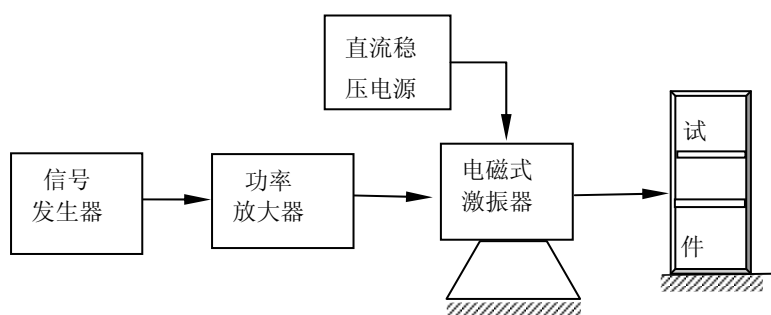


图 5-3 电磁式激振器系统连接示意图

以简谐规律变化时，则通过顶杆作用在物体上的激振力也以简谐规律变化。

使用这种激振器时，是将它放置在相对于被测试物体静止的地面上，并将顶杆顶在被测试物体的激振处，顶杆端部与被测试物体之间要有一定的预压力，使顶杆处于限幅器中间，且要注意满足相应的跟随条件式(9-4)。激振前顶杆应处于振动的平衡位置。这样激振器的可动部分和固定部分才不发生相应的碰撞。

与电磁式激振器配套使用的仪器有信号发生器、功率放大器和直流稳压电源。连接方框图如图5-3所示。(磁场采用永久磁铁产生时，激振器不需要直流电源。)

信号发生器是产生一定形式、一定频率范围和一定大小振动信号的设备，并向多功能形式发展，即同一信号发生器可产生多种振动信号，如正弦、脉冲(分波、三角波)随机和瞬态随机等多种激振信号。

功率放大器是将信号发生器输出的电压信号进行放大，给激振器提供与电压信号成正比的电流，以使电磁式激振器产生符合要求的激振力。

电磁式激振器的优点是能获得较宽频带(从零赫兹到1万赫兹)的激振力，即产生激振力的频率范围较宽。而可动部分质量较小，从而对被测物体的附加质量和附加刚度较小，使用也方便。因此，应用比较广泛，但这种激振器的缺点是不能产生太大的激振力。

电磁式激振器的安装方式有许多种。一般以下面三种安装方式为主。

1. 激振器固定安装方式

如图5-4所示，这种固定方式要求安装后，激振系统的共振频率要高于激振器工作频率的3~4倍以上。为此，应尽可能采用刚性较好的支架。在这种情况下，传递给试件的激振力就等于驱动线圈产生的电磁感应力 F 。

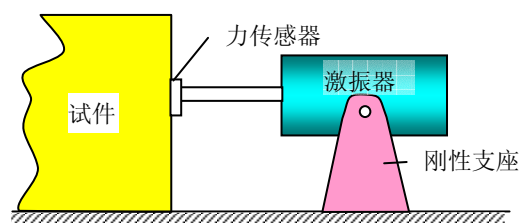


图5-4 激振器固定安装方式

2. 弹性悬挂安装方式

用弹簧或橡皮绳将激振器悬挂在支架上，如图5-5所示。它要求安装频率要远低于激振器的工作频率。此时施加于试件的激振力近似地等于驱动线圈产生的电磁感应力 F 。用手握激振器对试件做激振试验就属于这种安装方式，一般手握激振器的固有频率大约为2Hz~3Hz。

3. 弹性安装方式

弹性安装方式如图5-6所示，它适用于试验物体的质量远大于激振器的质量，激振器的工作频率远远高于安装共振频率的情况。

从以上三种安装方式可以看出，激振器都通过激振顶杆和试件刚性地连接在一

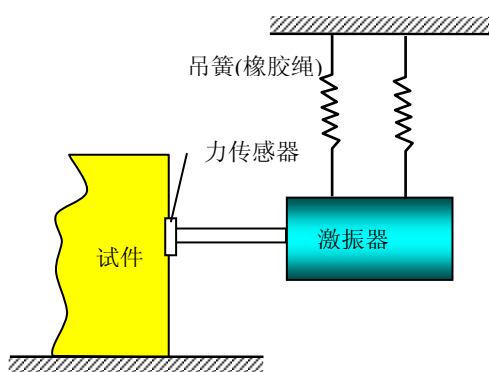


图 5-5 激振器悬挂安装方式

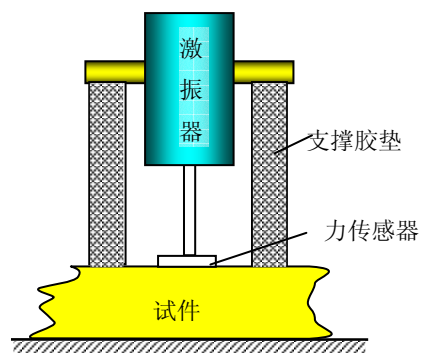


图 5-6 激振器弹性安装方式

起，或者通过预压力和试件连接起来。

这样，试件就等于在激振点处附加了一定的质量、刚度和阻尼，它对试件的动态参数会产生一定的影响。因此激振器的选择原则是以能激起试件振动为前提，尽量选用功率小、质量小、刚度小的激振器。对于轻型结构、刚度很弱（如薄板）的试件，则要采用非接触式激振器激振为好。

5.2 振动台

一、机械式振动台

机械式振动台有连杆偏心式和惯性离心式两种。它们的工作原理如图 5—7 所示。

惯性离心式振动台是基于旋转体偏心质量的惯性力而引起振动平台的振动来工作的，其工作原理与离心式激振器的工作原理相同。

连杆偏心式振动台是基于偏心轮转动时，通过连杆机构而使工作作交变正弦运动来工作的。振幅大小可用改变偏心距的大小来调节，频率可用改变电动机转速来调节。由于机械摩擦和轴承损耗的

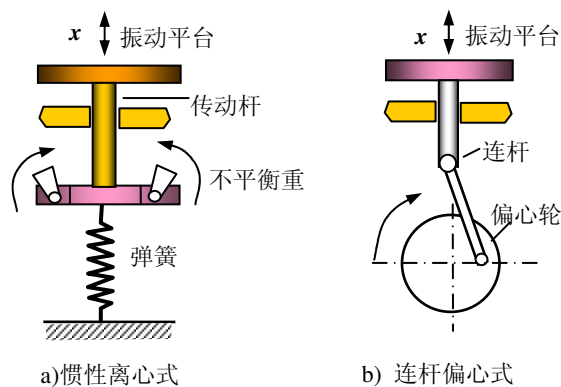


图 5-7 机械式振动台的工作原理

影响,这种振动台频率一般不能超过 50 Hz。连杆偏心式振动台的主要优点是能够得到很低的频率,且振幅与频率的变化无关;主要缺点是不能进高频激振,小振幅时失真度较大。一般来说,连杆偏心式振动台的有效频率范围为 0.5Hz~20Hz;惯性离心式振动台的有效频率范围为 10Hz~70Hz,且振幅在大于 0.1mm 以上时效果较好。机械式振动台的优点是结构简单,容易产生比较大的振幅和激振力;缺点是频率范围小,振幅调节比较困难,机械摩擦易影响波形,使波形失真度较大。

二、电磁式振动台

电磁式振动台的工作原理与电磁式激振器相同,只是振动台有一个安装被激振物体的工作平台,其可动部分的质量较大。控制部分由信号发生器和功率放大器等组成。控制箱与振动台之间由电缆连接。电磁振动台的种类很多,目前,除了正弦波振动台以外,还有随机振动台等。

电磁式振动台的频率范围很宽,可从近于零赫兹到几千赫兹,最高可达几十千赫兹。

电磁式振动台的优点是,噪音比机械式振动台小,频率范围宽,振动稳定,波形失真度小,振幅和频率的调节都比较方便。缺点是有漏磁场的影响,有些振动台低频特性较差。电磁式振动台的外形如图 5-8 所示。

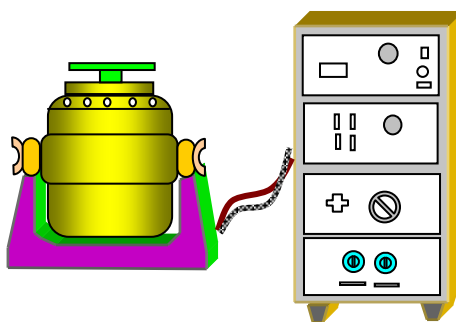


图 5-8 电磁式振动台

电磁式振动台的结构原理与电磁式激振器极为相似,如图 5-9 示。它的驱动线圈绕在线圈骨架上,通过连杆与台面刚性连接,并由上下支撑弹簧悬挂在振动台的外壳上。振动台的固定部分是由高导磁材料制成的,上面绕有励磁线圈,当励磁线圈通以直流电流时,磁缸的气隙间就形成强大的恒定磁场,而驱动线圈就悬挂在恒定磁场中。

当驱动线圈通过交流电流 $i = I_m \sin \omega t$ 时,由于磁场的作用,在驱动线圈上就产生电磁感应力 F ,从而使驱动线圈带动工作台面上下运动。电磁感应力 F 的大小

$$F = BLI_m \sin \omega t \quad (5-3)$$

式中 B ——空气气隙中的磁感应强度;

L ——驱动线圈导线的有效长度;

I_m ——驱动线圈中的电流幅值;

ω ——驱动交流电流的圆频率。

因此，改变驱动交流电流的大小和频率，就能改变工作台面的振动幅值的大小及振动的频率。电磁式振动台的控制系统如图5—10示。

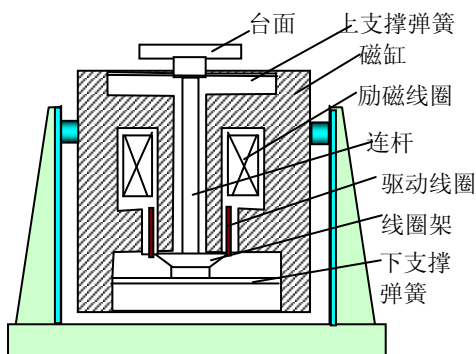


图5—9 电磁式振动台结构原理图

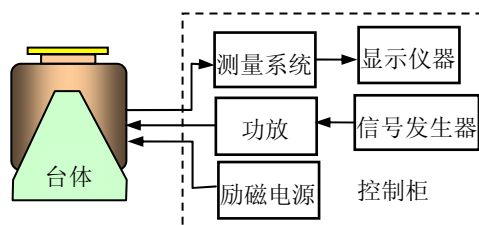


图5—10 电磁式振动台控制系统

控制系统分为三路，一路是励磁部分，它主要给励磁线圈提供励磁电流而产生恒定的磁场；另一路是激励部分，它主要由信号发生器和功率放大器等组成，其输出信号接到振动台的驱动线圈上，以使其产生频率和幅值均为可调的振动信号；第三路是测量部分，其传感器装在台体内，测量放大器的输出可接各种显示和记录设备。该部分用来测量台面的位移、速度和加速度值。整个控制系统组装在控制柜中。目前一些先进的振动台还装有微处理器。

5.3 液压式振动台

液压式振动台是将高压油液的流动转换成振动台台面的往复运动的一种机械，其原理如图5—11所示。其中台体由电动力式驱动装置、控制阀、功率阀、液压缸、高压油路（供油管路）和低压油路（回油管路）等主要部件组成。而电动力式驱动装置和电磁式振动台的控制系统结构一样，由信号发生器、功率放大器供给驱动线圈驱动电信号，从而驱动控制阀工作。由于液压缸中的活塞同台面相连接，控制台与功率阀有多个进出油孔，分别通过管路与液压缸、液压泵和油箱相连，这样在控制阀的控制下，通过不断改变油路就可使台面按控制系统的要求进行工作。

振动台处于平衡位置时，即电动力式驱动装置中的驱动线圈未加驱动信号时振动台的平衡位置，控制阀和功率阀的滑阀正好关闭了所有的进出油孔，使高压油不能通过控制阀和功率阀而进入液压缸，于是活塞处于静止平衡位置。当给驱动装置的驱动线圈加一驱动信号使驱动装置的可动部分向上移动时，控制阀即离开平衡位置向上运动，从而打开控制阀的高压油孔，高压油经下面的油路进入功率阀，迫使

功率阀向上运动，继而使功率阀的高压油孔打开，高压油从下面进入液压缸，并推动活塞向上运动，这样振动台台面就向上运动，而处在控制阀、功率阀和活塞上端的油经回油管流入油箱中。当外加驱动信号使驱动线圈的可动部分向下运动时，控制阀即向下运动，高压油从上面进入功率阀，迫使功率阀向下运动，高压油从上面进入液压缸而推动活塞向下运动，这样振动台就向下运动。不难看出，液压振动台就是利用控制阀和功率阀控制高压油流入液压缸的流量和方向来实现台面的振动，台面振动的频率和电驱动装置的驱动线圈的振动频率相同。

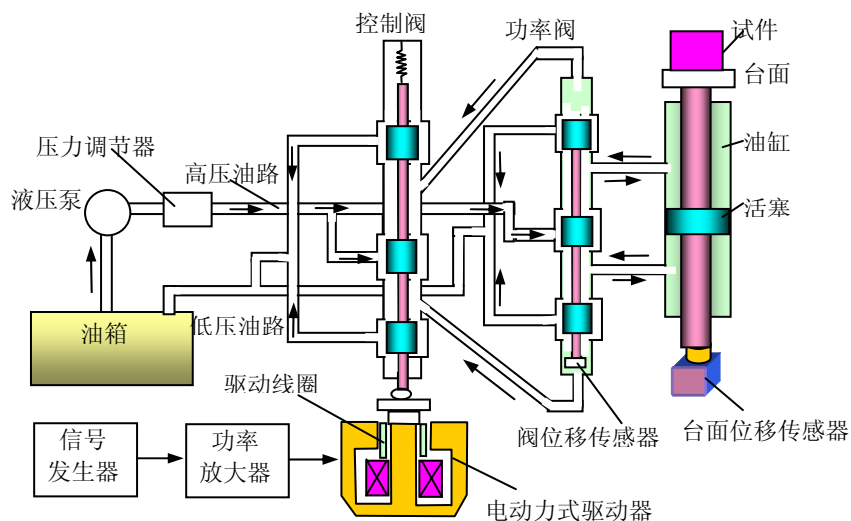


图 5-11 液压振动台结构原理

实际的液压振动台工作在闭环控制状态，它的控制系统方框图如图 5—12 所示。信号发生器产生的振动信号与各反馈回路传感器测量得到的阀位移、液压脉动及台

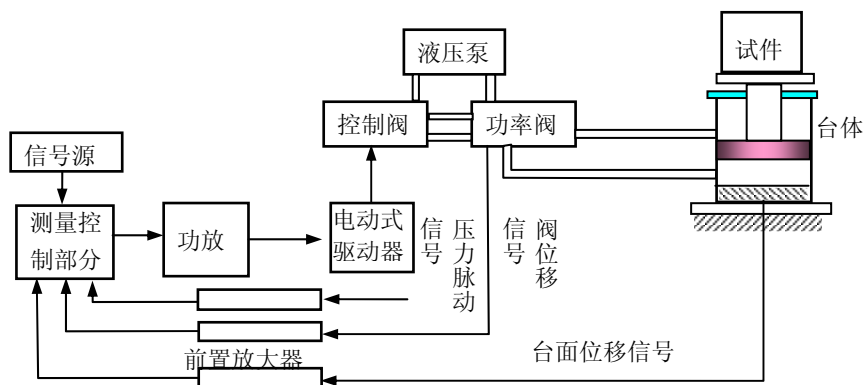


图 5-12 液压振动台的控制系统

面位移信号一起在控制部分进行处理,最后产生误差信号送到电动驱动装置的驱动线圈中,然后经控制阀和功率阀使振动台产生稳定的振动。

由于液压振动台可比较方便地提供大的激振力,台面能承受大的负载,因此一般都做成大型设备,以适应大型结构的模型试验。它的工作频率段下限可低至零赫,上限可达几百赫。由于台面由高压油推动,因而避免了漏磁对台面的影响。但是,台面的振动波形直接受油压及油的性能的影响。因此,压力的脉动、油液受温度的影响等都将直接影响台面的振动波形。所以,与电磁式振动台相比,它的波形失真度相对来说要大一些。表中5—1中列出了几种国产液压振动台的主要技术指标。

表5—1 几种国产液压振动台的主要技术指标

| 厂 | 型 | 最大 负载 (N) | 频率 范围 (Hz) | 最大 振幅 mm | 最大加 速度 $m \cdot s^{-2}$ | 振动 | 最大 推力 (N) | 台面 尺寸 mm |
|-------------|----------------|-----------------|------------------|----------------|-------------------------------|-----------|-----------------|-----------------|
| 苏州试验 仪器厂 | E—2.5 | 4 000 | 0.5~ 30 | ±12. 4 | 50 (空载) | 垂直、 水平 | 25 000 | 400 × 600 |
| 西北机械 厂 | Y5910 II/ZF | 1 500 | 0.5~ 30 | 50 | 50 | 垂直 | 10 000 | 400 × 600 |
| 西北机械 厂 | Y5925 II/ZF | 6 500 | 1~120 | 30 | 25 | 垂直、 水平 | 25 000 | φ700 |

5.4 其它激振方法

一、磁动式激振器

磁动式激振器是一种非接触式激振器。一般轻型结构或质量小、刚度很弱的试件进行激振试验时常采用它,它对被激励的物体的动态特性没有什么影响。

图5—13是磁动式激振器的结构原理图。它主要由磁铁和绕在铁心上的线圈组成。线圈有两个,一个叫励磁线圈,它通以直流电流,产生恒定的偏置磁场;另一个为驱动线圈,它由外部信号源供给激励信号,当驱动线圈通以交变电流时,磁铁对试件就产生交变的吸力,从而激起试件的振动。因此,该激振器适用于磁性材料制成的试件;若试件为非磁性材料,可在激振点处贴上一层铁磁材料薄片。

磁动式激振器中的励磁线圈的作用是产生一个恒定的磁场,对试件产生一恒定的作用力 F_0 ;而交变的激振力就叠加在 F_0 之上,其频率等于驱动电流的频率,如图5—14b)所示。但偏置电流不能太大以避免铁心的饱和。

磁动式激振器结构简单，制作方便，它的工作频率范围可在几十赫兹到数百赫兹之间。

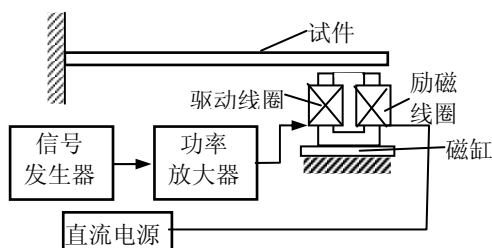


图 5-13 磁动式激振器原理图

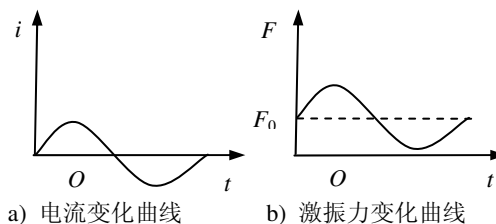


图 5-14 磁动式激振器激振力变化曲线

二、压电晶体片激振

晶体片激振线路如图 5-15 所示。把晶体片用 502 胶或 914 胶粘贴在试件上（一般粘贴在应变最大处），利用压电晶体的逆压电效应，在晶体片的两个极面上加一正弦的交变电压，晶体片就会产生正弦交

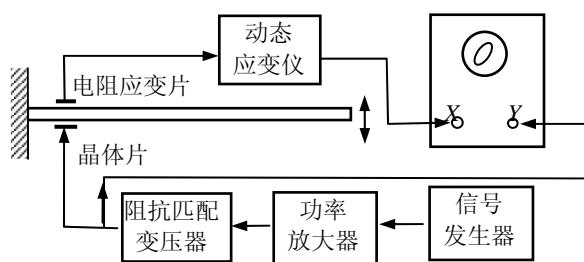


图 5-15 压电晶体片激振线路

变的伸缩，该伸缩力作用在被测部件上，就可激励它产生强迫振动。若保持晶体片两个极面上的电压幅值不变，逐步改变电压的频率，使被激励试件产生共振从而就能找到共振频率，并可测出幅频曲线等振动参数。

晶体片激振适用于比较小的轻型结构及刚度很弱的连续体的激振，由于晶体片比较小，对激振系统带来的附加质量和附加刚度也比较小。

三、力锤及应用

力锤又称手锤，是目前试验模态分析中经常采用的一种激励设备。它的结构有两种形式，如图 5-16 及图 5-17 所示。它由锤帽、锤体和力传感器等几个主要部件组合而成。当用力锤敲击试件时，冲击力的大小与波形由力传感器测得并通过放大记录设备记录下来。因此，力锤实际上是一种手握式冲击激励装置。使用不同的锤帽材料可以得到不同脉宽的力脉冲，相应的力谱也不同。常用的锤帽材料有橡胶、尼龙、铝、钢等。使用不同的锤帽材料，力谱的带宽不同。一般橡胶锤帽的带宽窄，钢最宽。因此，使用力锤激励结构时，要根据不同的结构和分析频带选用不同的锤

帽材料。

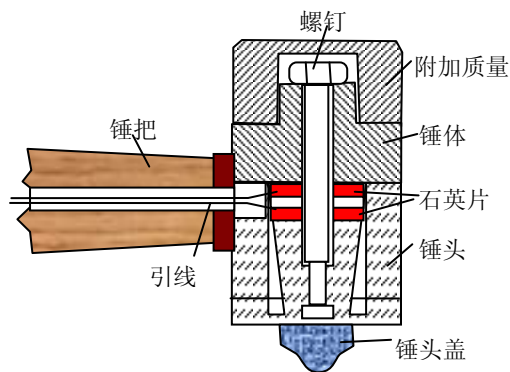


图 5-16 力锤的结构示意图

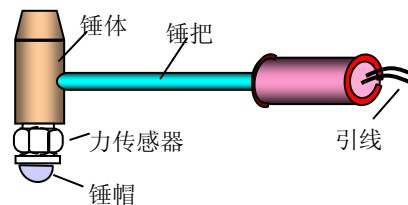


图 5-17 力锤

常用力锤的锤体重约几十克到几十千克，冲击力可达数万牛顿。

由于力锤结构简单，便于制作，使用十分方便，而且避免了使用价格昂贵的激振设备及其安装激振器带来的大量工作，因此，它被广泛地应用于现场及室内的激振试验。

思考题

1. 指出你所知道的激振设备和激振方法的优缺点及适用范围。
2. 简述电动力式激振器的工作原理及主要性能特点。

第 10 章 实验模态分析简介

模态分析及参数识别是研究复杂机械和工程结构振动的重要方法。它通过对激发力和响应的时域或频率分析，求得系统的频响函数（或传递函数），然后根据频响函数的特征，采用参数识别法求出结构的振动模态和结构参数。

10.1 基本概念

一、机械阻抗和机械导纳

机械阻抗的概念来自于机械振动的电模拟。振动系统（图 10-1）的微分方程为

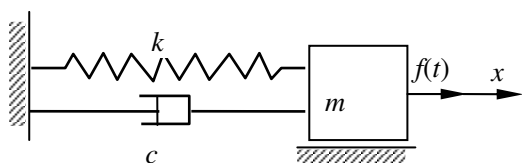


图 10-1 振动系统

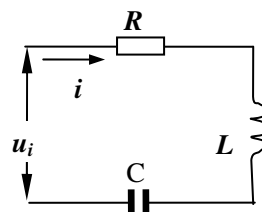


图 10-2 电路系统

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f(t) \quad (10-1)$$

电路系统的微分方程为

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = u(t) \quad (10-2)$$

两个方程具有相同的结构形式。二者之间参数的对应关系为

质量 m — 电感 L

激发力 $f(t)$ — 电压 $u(t)$

刚度 k — 电容的倒数 $1/C$

速度 $v = \frac{dx}{dt}$ — 电流 $i = \frac{dq}{dt}$

阻尼系数 c — 电阻 R

在式（10-2）中的电压和电流若用复数表示

$$u(t) = \bar{U}e^{j\omega t} \quad i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \bar{I}e^{j\omega t} \quad (10-3)$$

则电路中的电阻抗可表示为 $\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}}$ ，其中，复数符号表示电路中电压和电流的有效值和初相位。机械振动系统中也可相应地引入机械阻抗的概念；简谐振动系统某一点的激励与同一点或不同点的响应的速度输出量的复数之比称为机械阻抗。设

$$\begin{aligned} f(t) &= \bar{F}e^{j\omega t} & x(t) &= \bar{X}e^{j\omega t} & \dot{x}(t) &= j\omega\bar{X}e^{j\omega t} = \bar{V}e^{j\omega t} \\ \ddot{x}(t) &= -\omega^2\bar{X}e^{j\omega t} = \bar{A}e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (10-4)$$

则机械阻抗

$$Z_v = \frac{\text{激 发 力}}{\text{响 应 速 度}} = \frac{\bar{F}e^{j\omega t}}{\bar{V}e^{j\omega t}} = \frac{\bar{F}}{\bar{V}} \quad (10-5)$$

机械阻抗反映了系统振动发生的难易程度。由于振动系统的响应是用位移、速度和加速度来表示的，故机械阻抗又分为位移阻抗、速度阻抗和加速度阻抗。式(10-5)称为速度阻抗，位移阻抗和加速度阻抗分别表示如下：

位移阻抗

$$Z_x = \frac{f(t)}{x(t)} = \frac{\bar{F}e^{j\omega t}}{\bar{X}e^{j\omega t}} = \frac{\bar{F}}{\bar{X}} \quad (10-6)$$

加速度阻抗

$$Z_a = \frac{f(t)}{\ddot{x}(t)} = \frac{\bar{F}e^{j\omega t}}{\bar{A}e^{j\omega t}} = \frac{\bar{F}}{\bar{A}} \quad (10-7)$$

机械阻抗的倒数称为机械导纳，即：简谐振动系统某点的速度与同一点或不同点的激振力的复数之比称为机械导纳。

根据机械导纳的定义，将式(10-4)代入式(10-1)，得位移导纳

$$Y_x = \frac{x(t)}{f(t)} = \frac{\bar{X}}{\bar{F}} = \frac{1}{k - \omega^2 m + j\omega c} \quad (10-8)$$

速度导纳

$$Y_v = \frac{\dot{x}(t)}{f(t)} = \frac{\bar{V}}{\bar{F}} = j\omega Y_x \quad (10-9)$$

加速度导纳

$$Y_a = \frac{\ddot{x}(t)}{f(t)} = \frac{\bar{A}}{\bar{F}} = -\omega^2 Y_x \quad (10-10)$$

如果响应点和激振点为同一点，所测得阻抗或导纳称为原点阻抗或原点导纳（或驱动点阻抗、驱动点导纳）。如果响应点和激振点为不同点，所测得阻抗或导纳称为跨点阻抗或跨点导纳。

由振动理论可知，单自由度系统的频响函数

$$H(\omega) = \frac{\bar{X}}{\bar{F}} = \frac{1}{k - \omega^2 m + j\omega c} \quad (10-11)$$

由此可知，对于简谐振动系统，因其输入和输出频率均为 ω 的简谐函数，此时机械系统的位移导纳函数 Y_x 与频响函数 $H(\omega)$ 相等。

二、传递函数和频响函数

在电路系统中，将输出量的拉普拉斯变换与输入量的拉普拉斯变换之比定义为传递函数。因此，机械系统的传递函数的定义为：振动系统振动测试点 e 的位移响应 $x_e(t)$ 的拉氏变换与机械系统激振点 f 的激振力 $f_f(t)$ 的拉氏变换之比称为机械系统的传递函数。即

$$H_{ef}(s) = \frac{\phi[x_e(t)]}{\phi[f_f(t)]} = \frac{X_e(s)}{F_f(s)} \quad (10-12)$$

其中

$$X_e(s) = \int_0^{\infty} x_e(t)e^{-st} dt \quad F_f(s) = \int_0^{\infty} f_f(t)e^{-st} dt \quad (10-13)$$

式中， $x_e(t)$ 、 $f_f(t)$ 为实测函数。

如果响应点和激振点为同一点，即 $e = f$ 时，所测传递函数称为原点传递函数。如果响应点和激振点为不同点，即 $e \neq f$ 时，所测传递函数称为跨点传递函数。

对于单自由度系统；对强迫振动方程式 (10-1) 进行拉氏变换

$$m[s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + c[sX(s) - x(0)] + kX(s) = F(s) \quad (10-14)$$

若初始条件为 $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ ，则

$$[ms^2 + cs + k]X(s) = F(s) \quad (10-15)$$

由传递函数的定义得

$$H(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \quad (10-16)$$

这是单自由度振动系统传递函数的一种表示形式。它还可表示为留数形式，即

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} = \frac{1}{m(s-p)(s-p^*)} = \frac{r}{2j(s-p)} - \frac{r^*}{2j(s-p^*)} \quad (10-17)$$

其中 $p = -n + jp_d$ 、 $p^* = -n - jp_d$ 是方程 $ms^2 + cs + k = 0$ 的复根，且 $p_d = \sqrt{p_n - n^2}$ 、 $n = \frac{c}{2m}$ ，则 $r = \frac{1}{mp_d}$ 称为留数， p 、 p^* 称为极点。

在式 (10-16) 中，因为 $s = -a + j\omega$ ，取 $a = 0$ ，则 $s = j\omega$

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} = \frac{1}{k - \omega^2 m + j\omega c} \quad (10-18)$$

其中

$$X(\omega) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad F(\omega) = \int_0^{\omega} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (10-19)$$

由此可知；当 $n \rightarrow 0$ ， $s \rightarrow j\omega$ 时，比较式 (10-8)、式 (10-11) 和式 (10-18) 可知，此时传递函数与频响函数、机械导纳的表达式相同。但传递函数强调的是系统的输出与输入之间的数学关系，反映系统的动态特性，意义更为广泛。

设

$$p_n^2 = \frac{k}{m} \quad \lambda = \frac{\omega}{p_n} \quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \quad (10-20)$$

则式 (10-18) 可表示为

$$H(\omega) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1 - \lambda^2 + j2\zeta\lambda} = |H(\omega)|e^{j\varphi(\omega)} \quad (10-21)$$

其中

$$|H(\omega)| = \frac{1}{k\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4\lambda^2\zeta^2}} \quad (10-22)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{-2\lambda\zeta}{1 - \lambda^2} \quad (10-23)$$

它们分别是振动系统中的幅频特性曲线和相频特性曲线表达式。若将式 (10-21) 写成幅频实部曲线和幅频虚部曲线表达式

$$H^R(\omega) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1 - \lambda^2}{(1 - \lambda^2)^2 + 4\lambda^2\zeta^2} \quad (10-24)$$

$$H^I(\omega) = j \frac{1}{k} \cdot \frac{2\lambda\zeta}{(1 - \lambda^2)^2 + 4\lambda^2\zeta^2} \quad (10-25)$$

由此可知，幅频实部曲线和幅频虚部曲线表达式与相频特性曲线和相频特性曲线表达式的关系为

$$|H(\omega)| = \sqrt{[H^R(\omega)]^2 + [H^I(\omega)]^2} \quad (10-26)$$

幅频特性曲线和相频特性曲线如图 10—3a)、b) 所示。幅频曲线和相频曲线一般采用对数坐标以提高幅值分辨率。幅频实部、虚部曲线如图 10—3c)、d) 所示, 分别称为实频图和虚频图。这些特性曲线在参数识别中是很有用的。

三、单自由度系统的参数识别

通过理论分析, 给出了单自由度振动系统的实测幅频曲线、相频曲线、实频曲线和虚频曲线。根据模态参数与传递函数之间的关系, 通过测量系统的传递函数来求解模态参数的过程称为模态参数识别。常用的识别方法有频率域识别法、时域识别法、图解法和曲线拟合法等。本节仅介绍利用实测曲线图进行参数识别的图解法。其它识别方法可参考有关实验模态分析的书籍。

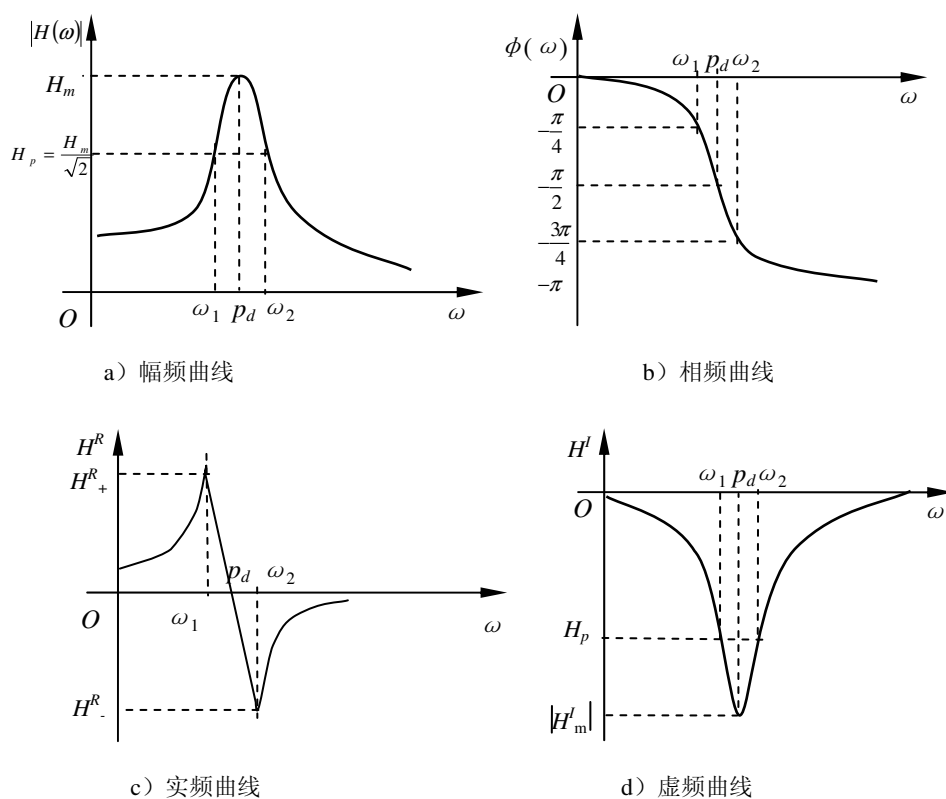


图 10—3 单自由度系统的实测频响特性曲线

图 10—3 所示的单自由度系统的实测频响曲线, 一般是由动态分析仪和 FFT 动态数字分析仪对测试数据进行数字分析处理后而绘制出的频响曲线。下面

根据已知频响曲线图对参数识别的步骤简述如下。

1. 幅频曲线图识别

图 10—3a) 所示为单自由度系统的实测幅频曲线, 识别步骤如下。

(1) 由共振峰极值 H_m 求得半功率点幅值 $H_p = 0.707H_m$, 再由半功率点 H_p 的带宽求得衰减系数近似值 $n \approx \frac{(\omega_2 - \omega_1)}{2}$ 。

(2) 由峰值位置得共振频率 p_d , 固有频率 $p_n = \sqrt{p_d^2 + n^2}$, 则 $\zeta = \frac{n}{p_n}$ 。

(3) 由共振峰值 H_m 和阻尼比 ζ 求得刚度 $k = \frac{1}{2\zeta H_m \sqrt{1 - \zeta^2}}$ 。

(4) 由固有频率和刚度求得质量 $m = \frac{k}{p_n^2}$ 。

2. 相频曲线图识别

图 10—3b) 所示为单自由度系统的实测相频曲线。由该曲线识别步骤如下。

(1) 由 $\varphi(\omega)$ 等于 $-\pi/2$ 点确定系统的共振频率 p_d , 其位置与阻尼无关, 由此 $p_n = p_d$ 。

(2) 由 $\varphi(\omega)$ 等于 $-\pi/4$ 和 $-3\pi/4$ 确定半功率点带宽: $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, 由 p_n 和 $\Delta\omega$ 可求衰减系数 $n \approx \Delta\omega/2$, 阻尼比 $\zeta = \frac{n}{p_n}$

3. 实频曲线图识别

图 10—3c) 为单自由度系统的实测实频曲线图。由该曲线识别参数步骤如下。

(1) 由 $H^R(\omega) = 0$ (共振点) 确定 p_d , 此位置与阻尼无关, 所以 $p_n = p_d$ 。

(2) 由正、负峰值确定半功率点带宽 $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, 由此可得衰减系数 $n \approx \Delta\omega/2$, 阻尼比 $\zeta = \frac{n}{p_n}$

(3) 由正、负峰值 H_+^R 、 H_-^R 求出刚度 $k = \frac{1}{2(H_+^R - H_-^R)\zeta(1 - \zeta^2)}$ 和质量 $m = \frac{k}{p_n^2}$ 。

4. 虚频曲线图识别

图 10—3d) 为单自由度系统的实测虚频曲线图。由该曲线识别参数步骤如下。

(1) 由负峰值确定半功率点幅值 $H_p = 0.5H_m^1$ ；由半功率点幅值求得半功率点带宽 $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ ，由此可得衰减系数 $n \approx \Delta\omega/2$ ，阻尼比 $\zeta = \frac{n}{p_n}$ 。

(2) 由负峰值点确定共振频率 p_d ，则 $p_n = \sqrt{p_d^2 + n^2}$ 。

(3) 由负峰值和阻尼比可求出刚度和质量，即 $k = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{2H_m^1\zeta\sqrt{1-\frac{3}{4}\zeta^2}}$ ， $m = \frac{k}{p_n}$ 。

以上只是针对利用位移的频响应函数曲线的参数识别介绍了几种方法，除此之外，还有圆拟合法（矢端图形法）等。对于利用速度、加速度的频响应函数曲线的参数识别方法与以上介绍的方法相似。具体内容可参考有关书籍。

10.2 多自由度系统的传递函数矩阵和频响应函数矩阵

在振动力学中，在强迫激励下的多自由度系统的运动方程为

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{f(t)\} \quad (10-28)$$

对此作拉氏变换

$$(s[m] + s[c] + [k])\{X(s)\} = \{F(s)\} \quad (10-29)$$

根据传递函数的定义

$$[H(s)] = \frac{\{X(s)\}}{\{F(s)\}} = \frac{1}{s^2[m] + s[c] + [k]} \quad (10-30)$$

它是 $N \times N$ 阶的方阵，称为多自由度系统的传递函数矩阵。而当 $s = j\omega$ 时，即

$$[H(s)]|_{s=j\omega} = [H(\omega)] = \frac{\{X(\omega)\}}{\{F(\omega)\}} = \frac{1}{-\omega^2[m] + j\omega[c] + [k]} \quad (10-31)$$

它也是 $N \times N$ 阶的方阵，称为多自由度系统的频响应函数矩阵。

传递函数矩阵式 (10—30)，还可表示成留数形式

$$[H(s)] = \sum_{r=1}^N \left(\frac{[A]_r}{s - p_r} + \frac{[A^n]_r}{s - p_r^n} \right) \quad (10-32)$$

其中， $p_r = -n_r + jp_{dr}$ ， $p_r^n = -n_r - jp_{dr}$ 是方程 $s^2[m] + s[c] + [k] = 0$ 的第 r 阶复根。

系统的第 r 阶主频率或第 r 阶模态频率 $p_{dr} = \sqrt{p_{nr}^2 - n_r^2}$ ，式中 $p_{dr}^2 = \frac{K_r}{M_r}$ ，

$n_r = \frac{C_r}{2M_r}$ ，而 M_r 、 K_r 、 C_r 分别是该系统的第 r 阶模态质量、模态刚度和模态

阻尼。则 $[A]_r$ 、 $[A^*]_r$ 分别是极点 p 、 p^* 的留数矩阵。即

$$[A]_r = \lim_{s \rightarrow p_r} (s - p_r)[H(s)], \quad [A^*]_r = \lim_{s \rightarrow p_r^*} (s - p_r^*)[H(s)] \quad (10-33)$$

它的第 e 行第 f 列的传递函数

$$H_{ef}(s) = \sum_{r=1}^N \left(\frac{A_{efr}}{s - p_r} + \frac{A_{efr}^*}{s - p_r^*} \right) \quad (10-34)$$

取 $s = j\omega$ ，可得用留数表示的频响函数矩阵

$$[H(\omega)] = \sum_{r=1}^N \left(\frac{[A]_r}{j\omega - p_r} + \frac{[A^*]_r}{j\omega - p_r^*} \right) \quad (10-35)$$

它的第 e 行第 f 列的频响函数

$$H_{ef}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{A_{efr}}{j\omega - p_r} + \frac{A_{efr}^*}{j\omega - p_r^*} \quad (10-36)$$

可以证明其中留数矩阵可用模态参数的形式表示

$$[A]_r = \frac{1}{a_r} \{\varphi\}_r \{\varphi\}_r^T, \quad [A^*]_r = \frac{1}{a_r^*} \{\varphi^*\}_r \{\varphi^*\}_r^T \quad (10-37)$$

在实模态情况下

$$\{\varphi\}_r = \{\varphi^*\}_r, \quad a_r = 2jM_r p_{dr}, \quad a_r^* = -2jM_r p_{dr} \quad (10-38)$$

留数形式的传递函数矩阵将在多自由度系统的参数识别的曲线拟合法时得到广泛的应用。

10.3 传递函数的物理意义

根据传递函数的定义，式 (10-30) 给出了输入激励的拉氏变换、输出响应的拉氏变换与传递函数三者之间的函数关系

$$[H(s)] = \frac{\{X(s)\}}{\{F(s)\}}$$

由此可得

$$\{X(s)\} = [H(s)]\{F(s)\} \quad (10-39)$$

将此式写成展式

$$\begin{Bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_N(s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) & \cdots & H_{1N}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) & \cdots & H_{2N}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N1}(s) & H_{N2}(s) & \cdots & H_{NN}(s) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \\ \vdots \\ F_N(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{k=1}^N H_{1k}(s)F_k(s) \\ \sum_{k=1}^N H_{2k}(s)F_k(s) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^N H_{Nk}(s)F_k(s) \end{Bmatrix} \quad (10-40)$$

则对于任一物理坐标位移响应 $x_e(t)$ 的拉氏变换可表示为

$$X_e(s) = \sum_{k=1}^N H_{ek}(s)F_k(s) \quad (10-41)$$

它表明, 该系统第 e 个物理坐标位移响应的拉氏变换, 等于各作用力的拉氏变换与其对应的传递函数乘积的代数和。

一、原点传递函数的物理意义

若 $k = e$ 时, $F_e(s) \neq 0$ 。当 $k \neq e$ 时, $F_k(s) = 0$, 则上式变为

$$X_e(s) = H_{ee}(s)F_e(s) \quad (10-42)$$

即

$$H_{ee}(s) = \frac{X_e(s)}{F_e(s)} \quad (10-43)$$

$H_{ee}(s)$ 表示在第 e 个物理坐标上施加单位激励, 引起该坐标的位移响应, 称为原点传递函数 (原点导纳)。

二、跨点传递函数的物理意义

设在第 f 个物理坐标施加激励, 即 $k = f$ 时, $F_f(s) \neq 0$, 当 $k \neq f$ 时, $F_k(s) = 0$, 则得

$$X_e(s) = H_{ef}(s)F_f(s) \quad (10-44)$$

即

$$H_{ef}(s) = \frac{X_e(s)}{F_f(s)} \quad (10-45)$$

$H_{ef}(s)$ 表示在第 f 个物理坐标上施加单位激励, 引起第 e 个坐标的位移响应, 因此它称为跨点传递函数 (跨点导纳)。

利用以上两种方法, 采取单点激振或单点拾振, 即可求出传递函数矩阵 $[H(s)]$ 的每个元素 $H_{ij}(s)$

三. 传递函数在模态分析中的物理意义

由于传递函数矩阵为

$$[H(s)] = \frac{\{X(s)\}}{\{F(s)\}} = \frac{1}{s^2[m] + s[c] + [k]}$$

利用正则振型的正交性, 在比例阻尼的情况下

$$\begin{aligned} [\varphi]^T [m] [\varphi] &= \text{diag}(M_r) \\ [\varphi]^T [k] [\varphi] &= \text{diag}(K_r) \\ [\varphi]^T [c] [\varphi] &= \text{diag}(C_r) \end{aligned} \quad (10-46)$$

解得

$$\begin{aligned} [m] &= [\varphi]^{-T} \text{diag}(M_r) [\varphi]^{-1} \\ [k] &= [\varphi]^{-T} \text{diag}(K_r) [\varphi]^{-1} \\ [c] &= [\varphi]^{-T} \text{diag}(C_r) [\varphi]^{-1} \end{aligned} \quad (10-47)$$

代入式 (10-30) 得

$$\begin{aligned} [H(s)] &= \frac{1}{[\varphi]^{-T} \text{diag}(M_r s^2 + C_r s + K_r) [\varphi]^{-1}} \\ &= [\varphi] \text{diag}(M_r s^2 + C_r s + K_r)^{-1} [\varphi]^T \end{aligned} \quad (10-48)$$

所以

$$[H(s)] = \sum_{r=1}^N \frac{\{\varphi\}_r \{\varphi\}_r^T}{M_r s^2 + C_r s + K_r} \quad (10-49)$$

写成展式为

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) & \cdots & H_{1f}(s) & H_{1N}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) & \cdots & H_{2f}(s) & H_{2N}(s) \\ & & \cdots & & \\ H_{e1}(s) & H_{e2}(s) & \cdots & H_{ef}(s) & H_{eN}(s) \\ & & \cdots & & \\ H_{N1}(s) & H_{N2}(s) & \cdots & H_{Nf}(s) & H_{NN}(s) \end{bmatrix} \\
& = \sum_{r=1}^N \frac{1}{M_r s^2 + C_r s + K_r} \begin{bmatrix} \varphi_{1r} \varphi_{1r} & \varphi_{1r} \varphi_{2r} & \cdots & \varphi_{1r} \varphi_{fr} & \varphi_{1r} \varphi_{Nr} \\ \varphi_{2r} \varphi_{1r} & \varphi_{2r} \varphi_{2r} & \cdots & \varphi_{2r} \varphi_{fr} & \varphi_{2r} \varphi_{Nr} \\ & & \cdots & & \\ \varphi_{er} \varphi_{1r} & \varphi_{er} \varphi_{2r} & \cdots & \varphi_{er} \varphi_{fr} & \varphi_{er} \varphi_{Nr} \\ & & \cdots & & \\ \varphi_{Nr} \varphi_{1r} & \varphi_{Nr} \varphi_{2r} & \cdots & \varphi_{Nr} \varphi_{fr} & \varphi_{Nr} \varphi_{Nr} \end{bmatrix} \quad (10-50)
\end{aligned}$$

传递函数矩阵的任一列、任一行，都包含了 M_r 、 C_r 、 K_r 和一组 $\{\varphi\}_r$ ， $r=1,2,\dots,N$ ，所差的只是一个常量因子。例如：第 e 行 $\varphi_{er}\{\varphi\}_r^T$ 中常量因子为 φ_{er} 。第 f 行 $\varphi_{fr}\{\varphi\}$ 中常量因子为 φ_{fr} 。因此为了求出模态矢量 $\{\varphi\}_r$ ，只要测出传递函数的一列或一行元素就可以了。

10.4 多自由度系统的模态参数识别

通过模态实验和数字信号处理，获得了实验结构频响函数矩阵中的一行（或一列）的频响函数。如果各阶模态比较离散，可以用单自由度模型估计模态参数。如果各阶模态比较密集，可用多自由度模型的曲线拟合法估计有关的模态参数。一般通用的参数识别方法有两种：

图解法和曲线拟合法。

一、图解法

利用频响函数曲线（如幅频曲线、相频曲线、实频曲线和虚频曲线等）直接进行模态参数识别的方法，称为图解识别法。图解法用于模态耦合较离散的系统，具有简单、直观等特点，但精度较低，常用于一些简单结构的实验模态分析中。

例如，当系统阻尼很小时，各阶固有频率相距较远，从图 10-4 可以看出各阶模态相互影响很小。因此，在识别某一阶模态参数时可以忽略相邻各阶模态的影响。其识别方法与有关公式如下：

由模态参数描述的传递函数矩阵式 (10-49) 可知, 它的第 e 行第 f 列的传递函数

$$H_{ef}(s) = \sum_{r=1}^N \frac{\varphi_{er}\varphi_{fr}}{M_r s^2 + C_r s + K_r} \quad (10-51)$$

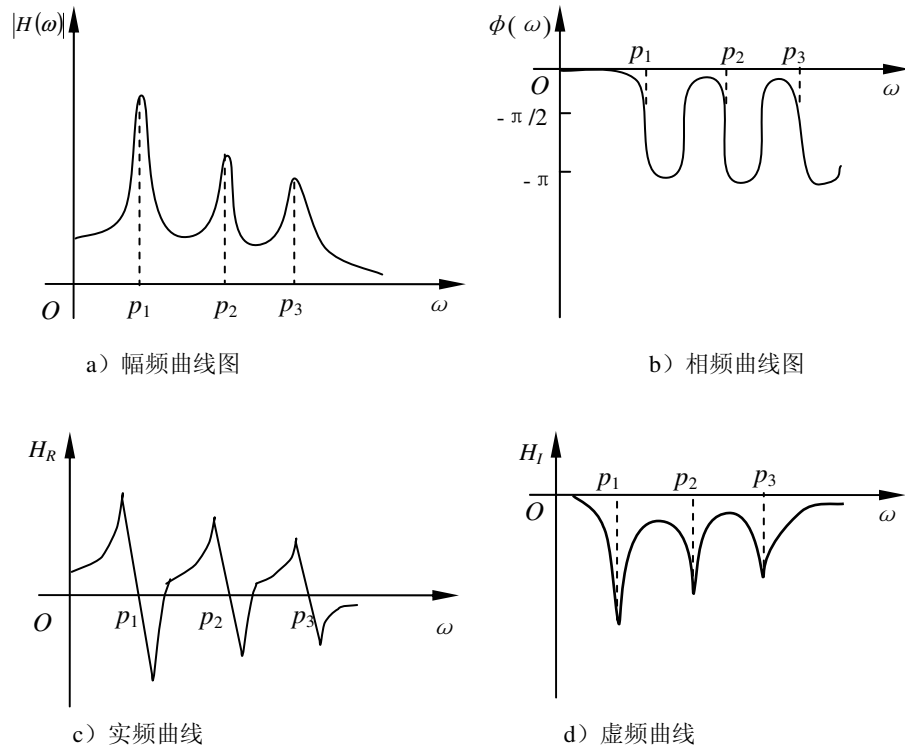


图 10-4 模态稀疏时的多自由度系统的频响曲线

令 $s = j\omega$, 可得相应的频响函数矩阵

$$H_{ef}(\varepsilon) = \sum_{r=1}^N \frac{\varphi_{er}\varphi_{fr}}{K_r - \omega^2 M_r + j\omega C_r} \quad (10-52)$$

若各阶模态比较离散, 相互之间没有影响, 则第 e 行第 f 列在第 i 阶模态的表达式为

$$H_{efi}(\omega) = \frac{\varphi_{ei}\varphi_{fi}}{K_i - \omega^2 M_i + j\omega C_i} \quad (10-53)$$

取

$$p_{ni}^2 = \frac{K_i}{M_i}, \quad \zeta = \frac{C_i}{2\sqrt{M_i K_i}} \quad (10-54)$$

$$H_{efi}(\omega) = \frac{\varphi_{ei}\varphi_{fi}}{K_i(1-\lambda^2 + j2\lambda\zeta)} \quad (10-55)$$

令等效刚度 $K_i^e = \frac{K_i}{\varphi_{ei}\varphi_{fi}}$, 则

$$H_{efi}(\omega) = \frac{1}{K_i^e(1-\lambda^2 + j2\lambda\zeta)} \quad (10-56)$$

此式与单自由度系统的频响函数式 (10-21) 相比较, 在形式上两者相同。因此, 可以按前述单自由度系统的图解法来识别, 这时得到的模态参数为主模态参数。但必须注意到此时等效刚度 K_i^e 代替了单自由度系统的刚度 k , 由于在测试中得到了传递函数 $[H(\omega)]$ 中的一行 (或一列), 即得到了不同测点的频响函数 $H_{efi}(\omega)$, 其中 $i=1, 2, \dots, N$ 。则可求出由各点频响函数所识别的等效刚度 K_i^e 的倒数所形成的矩阵为

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{K_{1i}^e} & \frac{1}{K_{2i}^e} & \dots & \frac{1}{K_{Ni}^e} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{\varphi_{1i}\varphi_{fi}}{K_i} & \frac{\varphi_{2i}\varphi_{fi}}{K_i} & \dots & \frac{\varphi_{Ni}\varphi_{fi}}{K_i} \end{bmatrix}^T = \frac{\varphi_{fi}}{K_i} \{\varphi\}_i \quad (10-57)$$

出此就得到了第 i 阶振型函数 $\{\varphi\}_i$, 但多了一个常数项 $\frac{\varphi_{fi}}{K_i}$, 可证明经归一化

后就可进一步得到系统的第 i 阶主模态。由于 $i=1, 2, \dots, N$, 所以只要测出传递函数的一行或一列。就能得出所有模态参数及振型函数。图 10-5 表示了从一悬臂梁的虚频图中得到的前三阶主模态。

图解法的优点是简便、直观; 缺点是精度差, 不能排除外噪干扰。所以, 图解法不是完整的识别方法, 要提高识别精度, 必须进行优化, 排除干扰噪声。

二、曲线拟合法

曲线拟合法是用一条连续曲线去拟合一组离散的测试数据, 然后利用拟合曲线识别有关参数的方法。它是建立在各种优化计算的基础上, 由计算机进行识别, 采用优化算法, 可以在一定程度上排除有关误差, 使结果尽可能准确地反映实际系统。

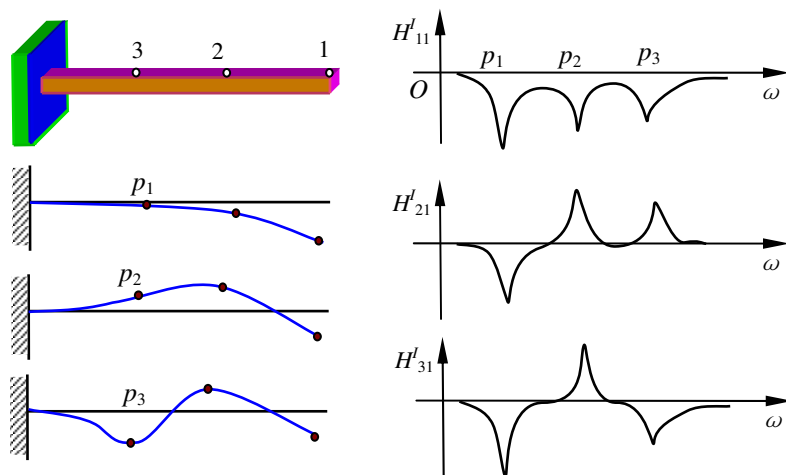


图 10—5 悬臂梁的前三阶主模态和虚频图

曲线拟合法，一般是利用图解法所识别的参数作为初始值进行迭代优化计算，并利用有关的优化准则判断计算模态参数的精度，直到满足要求为止，从而可利用传递矩阵函数识别出振动系统的有关参数，如固有频率 p_{dr} 、衰减阻尼系数 n_r 和留数 $[A]_r$ 等，在此基础上可进一步计算求出 M_r ， K_r ， C_r ， $\{\varphi\}$ 等。在这里着重讨论了留数以后，如何估算模态矢量、模态质量、模态刚度和模态阻尼。

1. 模态矢量 $\{\varphi\}$ 的识别

在实模态系统中，由式 (10—37) 和式 (10—38) 可得留数与模态矢量的关系

$$[A]_r = \frac{1}{2jM_r p_{dr}} \{\varphi\}_r \{\varphi\}_r^T \quad (10-58)$$

或

$$[r]_r = 2j[A]_r = \frac{1}{M_r p_{dr}} \{\varphi\}_r \{\varphi\}_r^T \quad (10-59)$$

这是在模态参数识别中广为应用的留数矩阵的形式。令

$$u_r = 1/M_r p_{dr} \quad (10-60)$$

称为模态比例因子，式 (10—59) 可改写为

$$[r]_r = u_r \{\varphi\}_r \{\varphi\}_r^T \quad (10-61)$$

它的第 f 列的留数列阵、第 e 行第 f 列的留数分别为

$$\{r_{1fr} \quad r_{2fr} \quad \dots \quad r_{Nfr}\}^T = u_r \varphi_{fr} \{\varphi_{1r} \quad \varphi_{2r} \quad \dots \quad \varphi_{Nr}\}^T \quad (10-62)$$

$$r_{efr} = u_r \varphi_{er} \varphi_{fr} \quad e = 1, 2, \dots, N \quad (10-63)$$

由此可知, 在估算出留数矩阵的一列(或一行)以后, 可以用下述方法估算模态矢量:

(1) 用原点的第 r 阶留数估算第 r 阶模态矢量在原点自由度的分量, 由式(10-63)得

$$\varphi_{fr} = \sqrt{r_{ffr} / u_r} \quad (10-64)$$

(2) 用跨点的第 r 阶留数估算第 r 阶模态矢量中其余自由度的分量, 由式(10-63)得

$$\varphi_{er} = r_{efr} / \sqrt{u_r r_{ffr}} \quad e = 1, 2, \dots, N \quad (10-65)$$

(3) 第 r 阶模态矢量

$$\{\varphi\}_r = \left\{ \frac{r_{1fr}}{\sqrt{u_r r_{ffr}}} \quad \frac{r_{2fr}}{\sqrt{u_r r_{ffr}}} \quad \dots \quad \sqrt{\frac{r_{ffr}}{u_r}} \quad \frac{r_{Nfr}}{\sqrt{u_r r_{ffr}}} \right\}^T \quad (10-66)$$

2. 模态矢量的归一化

如前所述, 实验结构的留数是唯一的, 它从实测的频响函数中直接被估算出来。模态矢量则不同, 它的各个分量之间的比值是唯一的, 各分量的大小并非唯一, 随模态比例因子的不同而变化。模态比例因子的选取方法, 亦称模态矢量的归一化方法。常用的归一化方法有以下五种。

(1) 模态比例因子 $u_r = 1$, 在式(10-66)中 $u_r = 1$ 即为此时的模态矢量, 不另写出。

(2) 在各阶模态矢量中, 令其幅值最大的元素为 1。例如, 在式(10-66)中, 假设第 2 个元素最大, 则此时的第 r 阶模态矢量

$$\{\varphi\}_r = \left\{ \frac{r_{1fr}}{r_{2fr}} \quad \dots \quad \frac{r_{ffr}}{r_{2fr}} \quad \frac{r_{Nfr}}{r_{2fr}} \right\}^T \quad (10-67)$$

(3) 令各阶模态矢量的模为 1, 即

$$\sqrt{\varphi_{1r}^2 + \varphi_{2r}^2 + \dots + \varphi_{fr}^2 + \dots + \varphi_{Nr}^2} = 1 \quad (10-68)$$

设

$$Q_r = \sqrt{r_{1fr}^2 + r_{2fr}^2 + \dots + r_{ffr}^2 + \dots + r_{Nfr}^2} \quad (10-69)$$

则

$$\{\varphi\}_r = \left\{ \begin{array}{cccc} \frac{r_{1fr}}{Q_r} & \frac{r_{2fr}}{Q_r} & \dots & \frac{r_{Nfr}}{Q_r} \end{array} \right\}^T \quad (10-70)$$

(4) 在各模态矢量中, 令任意某个元素为 1, 与上述第 2 种情形类似, 不重述。

(5) 令各阶模态质量 $M_r = 1$, 即在式 (10-69) 中

$$M_r = \frac{1}{u_r p_{dr}} = 1, \text{ 所以 } u_r = \frac{1}{p_{dr}} \quad (10-71)$$

此时的模态矢量具有式 (10-70) 的形式, 但式中的

$$Q = \sqrt{\frac{r_{jfr}}{p_{dr}}} \quad (10-72)$$

3. 模态质量、模态刚度和模态阻尼

由式 (10-60) 得, 模态质量

$$M_r = \frac{1}{u_r p_{dr}} \quad (10-73)$$

模态刚度

$$K_r = p_r^2 M_r = \frac{(p_{dr}^2 + \sigma^2)}{u_r p_{dr}} \quad (10-74)$$

模态阻尼

$$C_r = 2\sigma_r M_r = \frac{2\sigma_r}{u_r p_{dr}} \quad (10-75)$$

4. 动画显示

获得了模态矢量式 (10-70) 后, 实验结构各自由度的主振动就知道了。例如, 在单一的第 r 阶模态振动中, 各自由度的响应为

$$\{x\} = \{\varphi\}_r A_r e^{-n_r t} \sin(p_{dr} t + \theta_r) \quad r = 1, 2, \dots, N \quad (10-76)$$

如果将一个振动周期等分成若干个时间间隔(一般为 40 等分), 在每一个时间间隔, 各自由度的相互位置构成一幅画面, 即主振型在此瞬时的形态, 在屏幕上连续显示这些画面, 可观察到一个连续运动的动画图形, 这就是实验结构第 r 阶主振型的动画图形。

10.5 模态分析中的几种激振方法

由于线性简谐振动系统的频响函数与传递函数是等同的，它反映了振动系统的固有动态特性，与激振和响应的大小无关，无论激振力和响应是简谐的、复杂周期性的、瞬态的或者是随机的，所求得的传递函数都应该是一样的。因此，传递函数通过实验方法获得所采用的测量方法很多，按照不同的激振方法可分为稳态正弦激振法、瞬态激振法和随机激振法等。

一、稳态正弦激振法

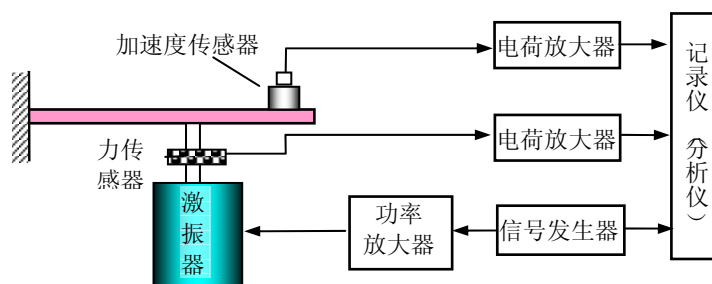


图 10-6 稳态正弦激振法

稳态正弦激振法是一种传统的测试方法。测试时，给机械振动系统或结构施以一定的稳态正弦激振力，激振力的频率精确可调，在激振力的作用下，系统产生振动。然后精确地测量不同频率下的激振力的大小和相位及各测点响应的大小和相位。测试方法及系统框图如图 10—6 所示，测量信号用磁带记录仪记录下来，然后用分析仪器进行分析。稳态正弦激振可分为单点激振和多点激振两种方法。单点激振所用的设备少，测试方便，但难于得到好的响应曲线；多点激振所用的设备多，测试时要调节各点的激振力，使其按一定的规律变化，因而测试工作比较困难，但得到的响应曲线好。稳态正弦激振法的特点是：激振力频率和幅值可以精确调节，测试精度高，但测试费时间，需要从低频到高频逐步进行扫描测试，所需的设备多。

二、瞬态激振法

瞬态激振法是一种比较方便的激振方法，常用的激振法有两种快速正弦扫描激振法和脉冲锤击激振法。

1. 快速正弦扫描激振法

快速正弦扫描激振法的测试仪器与稳态正弦激振法基本相同，不同之处是，快速正弦扫描激振法要求信号发生器能在整个测试频率区间内作快速扫描，扫描时间约为几秒或十几秒，目的是希望得到一个近似的平直谱，如图 10—7 所示。平直谱

的激励力在整个扫描频率范围内基本相等，扫描函数为

$$f(t) = F \sin(at^2 + bt) \quad 0 < t < T \quad (10-77)$$

式中 T ——扫描周期；

F ——激励力振幅；

a, b ——频率系数, $a = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{2T}$, $b = \omega_{\min}$ 。

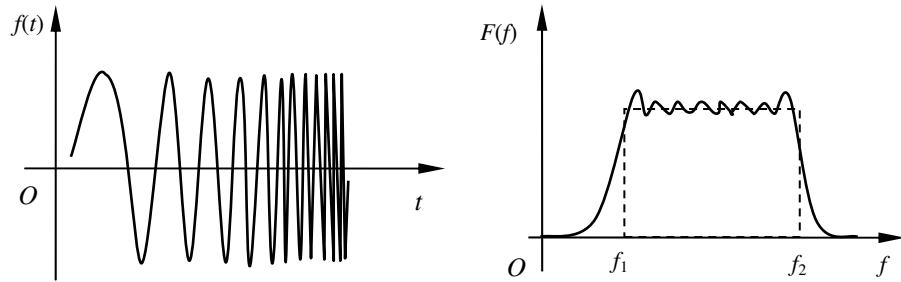


图 10—7 快速正弦扫描的力与力谱

2. 脉冲锤击激励法

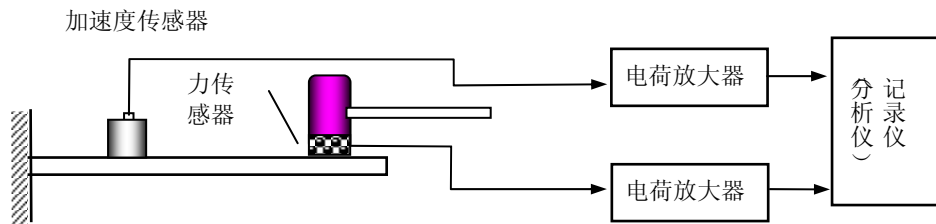


图 10—9 脉冲锤击法

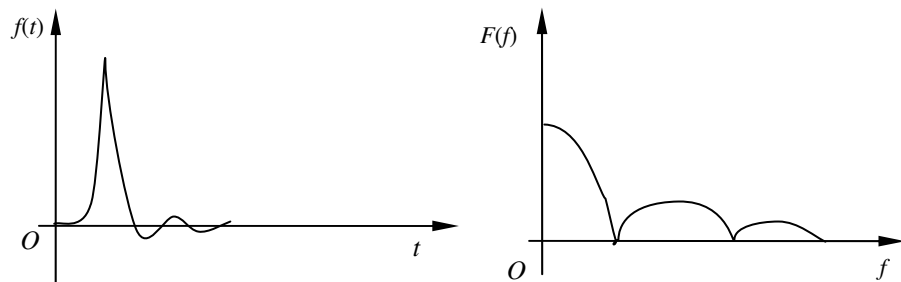


图 10—8 脉冲函数及频谱

用脉冲锤（力锤）对试件进行敲击，产生一宽频带的激励，它能在很宽频率范围内激励出各种模态。脉冲力函数及频谱如图 10—8 所示，测试方法及框图如图 10—9

所示。采用脉冲锤击法时，为了消除噪声干扰，必须采用多次平均。

三、随机激振法

随机激振法目前常用的有三种：纯随机激振法、伪随机激振法和周期随机激振法。

(1) 纯随机激振法。在整个时间历程内所有激振信号都是随机的，如白噪声，其特点是功率谱是平直谱，没有周期性。通常是将白噪声发生器产生的信号记录在磁带上，通过功率放大器输出给激振器进行激振。

(2) 伪随机激振法。在一个周期内激振信号是随机的，但各个周期的激振信号是一样的。

(3) 周期随机激振法。它主要由变化的伪随机激振信号组成，当激振进行到某几个周期后，又出现一个新的伪随机激振信号，它综合了纯随机信号和伪随机信号的优点。做到了既是周期信号，统计特性又是随时间变化的。

10.6 模态分析的实验过程

实验模态分析主要是通过模态实验，测量系统的振动响应信号或同时测量系统的激励信号、响应信号，从测量到的信号中，识别描述系统动力特征的有关参数。识别的主要内容有以下两种：

(1) 物理参数识别，包括质量矩阵、刚度矩阵和阻尼矩阵；

(2) 模态参数识别，包括固有频率、衰减系数、模态矢量、模态刚度和模态阻尼。

模态分析系统一般由以下三部分组成：

(1) 激振系统：使得系统产生稳态、瞬态或随机振动。

(2) 测量系统：用传感器测量实验对象的各主要部位上的位移、速度或加速度振动信号，然后将这些信号与激振信号一起记录到磁带记录仪或硬盘上。

(3) 分析系统：将记录在磁带或硬盘上的激励信号和响应信号经过模数转换，采样输入到数字式分析仪或计算机中，用硬件或软件系统识别振动系统的模态参数。

由于在做模态实验时，只需要测得传递函数的一行或一列就可以获得全部模态信息，因此，若固定在一点测量振动响应信号，而不断改变激励信号的作用点，这样就测量出了传递函数的一行；若固定在一点进行激励，而在不同点进行振动响应信号测量，即不断改变振动响应信号的测试点，这样就测量出了传递函数的一列。

测量的基本步骤如下。

(1) 确定实验模型，将实验结构支撑起来（边界条件的确定）。

(2) 模态实验，利用第五节介绍的方法激励实验结构（一般用锤击法），并记录原点及各测点的激励、响应时间历程。

(3) 对各测点的时间历程的记录数据进行数字处理，利用第二节、第三节的方法及 FFT 求出各测点的传递函数，并组成传递函数矩阵。

(4) 利用第四节介绍的方法进行参数识别。

(5) 进行动画显示。

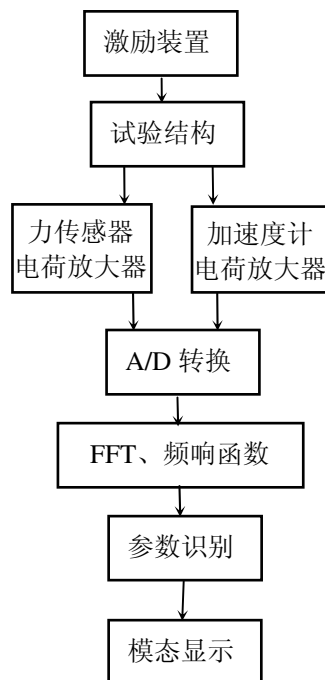


图 10—10 模态实验流程图

思 考 题

1. 简述机械阻抗、机械导纳的定义并写出表达式。
2. 写出单自由度（简谐振动）系统的传递函数或频响函数的表达式，并画出其频响特性曲线（幅频曲线、相频曲线、实部频响曲线和虚部频响曲线）。
3. 写出多自由度（简谐振动）系统的传递函数矩阵留数形式的表达式。
4. 简述传递函数的物理意义？
5. 简述传递函数在模态分析中的物理意义，并写出公式及矩阵。
6. 简述你知道的几种参数识别方法及简单过程。
7. 实验模态分析中有几种激振方法？
8. 简述模态分析的实验过程。